EQUIPE D'ANALYSE
ESA 7064 – CNRS
Université Pierre et Marie Curie - Paris 6

Tour 46 - 0 - Boîte 186 - 4, place Jussieu - 75252 PARIS CEDEX 05
Tél : (33-1) 44 27 53 49 - Télécopie : (33-1) 44 27 25 55 - lana@ccr.jussieu.fr

COURS DE MATHEMATIQUES 4

DEUG 2

Analyse vectorielle

Sylvie DELABRIERE

1996-97

1

APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES ET THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES

1.1 Rappels et notations sur les applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

On notera

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \ , ..., \ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}$$

la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Rappels 1.1.1. *Représentation matricielle en dimension finie.*

Les coordonnées des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ (respectivement $\mathbb{R}^p$) dans la base canonique sont représentés par des matrices $n \times 1$ (respectivement $p \times 1$), appelées matrices colonne.

Rappels 1.1.2. *Une application linéaire $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p)$ est représentée par une matrice $p \times n$, A, à p lignes et n colonnes. Les vecteurs colonne de A sont les coordonnées des images par T, des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, exprimées dans la base canonique de l'espace $\mathbb{R}^p$.*

Rappels 1.1.3. *Cas particuliers.*

1) Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ sont représentées par des matrices $p \times 1$, c'est à dire par des matrices colonne.$\mathscr{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^p)$ est donc égal à $\mathbb{R}^p$.

2) Les formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$, c'est à dire les applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, sont représentées par des matrices $1 \times n$, c'est à dire par des matrices ligne.

En identifiant les matrices colonnes et les matrices lignes à n éléments, ceci nous permet d'identifier algébriquement le dual de $\mathbb{R}^n$, $(\mathbb{R}^n)^\star = \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$ lui-même.

1.2 Rappels et notations sur les fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

On munira toujours $\mathbb{R}^n$ d'une norme notée $\|.\|$. En pratique, on pourra prendre l'une des normes classiques :

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| \ , \ \|x\|_\infty = \sup_{i=1,2,\dots,n} |x_i| \ , \ \|x\|_2 = \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)^{1/2}$$

Dans la pratique, le choix de la norme n'aura pas d'importance à cause du théorème suivant :

Théorème 1.2.1. *Théorème de F. Riecz.*
Sur un espace vectoriel de dimension finie E, toutes les normes sont équivalentes, c'est à dire qu'étant données deux normes $\|.\|$ et $|||.|||$ sur E, il existe des constantes $a, b > 0$ telles que

$$\forall x \in E \ , \ a|||x||| \leq \|x\| \leq b|||x|||$$

Rappels 1.2.2. *Boules ouvertes, boules fermées, voisinages.*

i) *Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Une boule ouverte $B(a,r)$ de centre a et de rayon r est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par*

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$$

On appellera plus simplement ces ensembles des boules.

ii) *Une boule fermée $\overline{B}(a,r)$ de centre a et de rayon r est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par*

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$$

Rappels 1.2.3. *Soit $a \in \mathbb{R}^n$. On rappelle qu'un sous-ensemble $V \subset \mathbb{R}^n$ est un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$ s'il existe $r > 0$ tel que la boule $B(a,r)$ de centre a et de rayon r, est incluse dans V.*

On notera $\mathscr{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a dans $\mathbb{R}^n$.

Rappels 1.2.4. *On dit qu'une partie D est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ si D est un voisinage de chacun de ses points.*

Rappels 1.2.5. *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction définie sur une partie ouverte D de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. On dira que $f(h)$ converge verx 0 quand $h \to 0$ si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \alpha > 0 \text{ telque } \|h\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(h)\| \leq \varepsilon$$

Rappels 1.2.6. *Fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$.*
Une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ définie sur une partie ouverte D de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ est continue en $a \in D$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon$$

Cette propriété s'exprime aussi en disant que pour toute boule $B(f(a),\varepsilon)$ de $\mathbb{R}^p$, il existe une boule $B(a,\eta)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $f(B(a,\eta)) \subset B(f(a),\varepsilon)$

On dit que f est continue sur D si f est continue en tout point $a \in D$. On notera $\mathscr{C}(D;\mathbb{R}^p)$ l'ensemble des fonctions continues de $D \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

On vérifie comme dans le cas réel que la somme, le produit par un réel et la composition de deux fonctions continues sont continues. Le produit de deux fonctions continues à valeurs réelles est continu. La fonction réciproque d'une fonction continue qui ne s'annule pas est aussi continue.

1.3 Rappels et notations sur les normes d'applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Rappel 1.3.1. *Norme d'une application linéaire.*
Si $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^p)$, on peut définir sa norme par

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| \ \mid x \in \mathbb{R}^n \ , \ \|x\| \leq 1\}$$

Cette norme vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \ , \ \|T(x)\| \leq \|T\| \, \|x\|$$

Rappel 1.3.2. *En particulier, si $p = 1$, la norme d'une forme linéaire $y \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^\star$ est donnée par $\|y\| = \sup\{|y(x)| \ \mid x \in \mathbb{R}^n \ , \ \|x\| \leq 1\}$.*
Par symétrie entre $\mathbb{R}^n$ et son dual $(\mathbb{R}^n)^\star$, on peut aussi montrer que la norme de $\mathbb{R}^n$ est donnée par $\|x\| = \sup\{|y(x)| \ \mid y \in (\mathbb{R}^n)^\star \ , \ \|y\| \leq 1\}$

1.4 Applications différentiables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Définition 1.4.1. *1) Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et V un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$. Une application $f : V \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en a s'il existe une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, notée $f'(a)$, telle*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)(h) + \|h\| \, \varepsilon(h)$$

où $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

2) L'application $f'(a) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ est appelée la dérivée de f en a ou encore l'application linéaire tangente à f en a.

3) L'application affine $x \to f(a)+f'(a)(x-a)$ est appelée l'application affine tangente à f en a.

Exemple 1.4.2. *Une application réelle définie sur un voisinage V de $a \in \mathbb{R}$ est différentiable en a si elle est dérivable en a et sa dérivée est $f'(a)$.*

Théorème 1.4.3. *(Dérivation suivant un vecteur).*

Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et V un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$. Si $f : V \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en a, alors quel que soit $h \in \mathbb{R}^n$, on a

$$f'(a)(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

Démonstration : Soit $h \in \mathbb{R}^n$ donné. On écrit la définition de la différentiabilité de f au point a, en utilisant le vecteur th :

$$f(a+th) = f(a) + tf'(a)(h) + |t|\,\|h\|\,\varepsilon(th) = f(a) + tf'(a)(h) + |t|\,\varepsilon_1(t)$$

où on a posé $\varepsilon_1(t) = \|h\|\,\varepsilon(th)$.
Comme $\varepsilon_1(t) \to 0$ quand $t \to 0$, ceci implique bien que

$$f'(a)(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

■

Corollaire 1.4.4. *Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et V un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$. Si $f : V \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en a, alors, $f'(a)$ est unique.*

Démonstration : L'application linéaire $f'(a)$ est en effet entièrement déterminée par les égalités du théorème 1.4.3. ■

Exemples 1.4.5. *1) L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\ ,\ f(x) = x_1 x_2$$

est différentiable en tout point $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et sa dérivée en $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ est l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\ ,\ f'(a)(h) = a_2 h_1 + a_1 h_2 = \begin{pmatrix} a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

2) L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\ ,\ f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

est différentiable en tout point $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et sa dérivée en $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ est l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\forall h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\ ,\ f'(a)(h) = (h_1 + h_2, a_1 h_2 + a_2 h_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

DÉMONSTRATION : *1)* En effet, on peut écrire :

$$f(a+h) - f(a) - a_2h_1 - a_1h_2 =$$

$$(a_1+h_1)(a_2+h_2) - a_1a_2 - a_2h_1 - a_1h_2 = h_1h_2$$

et on a :

$$|h_1h_2| \leq \frac{1}{2}(|h_1|^2 + |h_2|^2) = \frac{1}{2}\,\|(h_1,h_2)\|_2^2$$

2) De la même façon, on écrit :

$$f(a+h) - f(a) - \begin{pmatrix} h_1+h_2 \\ a_1h_2+a_2h_1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1+h_1+a_2+h_2 \\ (a_1+h_1)(a_2+h_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ a_1a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_1+h_2 \\ a_1h_2+a_2h_1 \end{pmatrix} =$$

$$-\begin{pmatrix} 0 \\ h_1h_2 \end{pmatrix}$$

et

$$\left\|\begin{pmatrix} 0 \\ h_1h_2 \end{pmatrix}\right\|_2 \leq \frac{1}{2}(|h_1|^2 + |h_2|^2) = \frac{1}{2}\,\|(h_1,h_2)\|_2^2$$

■

Proposition 1.4.6. *1) Toute application constante est différentiable, de dérivée nulle en tout point.*

2) Toute application linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ et sa dérivée est l'application linéaire constante, égale à T.

3) Toute application affine continue définie par $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $Ax = b + Tx$, où $b \in \mathbb{R}^p$ et $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^p)$ est différentiable en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ et sa dérivée est l'application linéaire constante, égale à T.

DÉMONSTRATION : *1)* est évident
2) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On écrit :

$$T(x+h) - T(x) = T(h)$$

D'où $T'(x) = T$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
3) se démontre comme *2)*. ■

Définition 1.4.7. *Le vecteur de $\mathbb{R}^p$ défini par $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+th)-f(a)}{t}$ quand il existe est appelé dérivée de f suivant le vecteur h.*

On peut donc interpréter le théorème 1.4.3 en disant que toute fonction différentiable en a admet des dérivées suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^n$.

La réciproque de cette propriété est fausse :

Exemple 1.4.8. *L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ , \ f(x) = \frac{x_1\,|x_2|}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}$$

admet des dérivées suivant tout vecteur en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *mais n'est pas différentiable en ce point.*

Démonstration : En effet, on peut écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R} \ , \ \forall h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ , \ f(th) = t\frac{h_1 h_2}{(h_1^2 + h_2^2)^{1/2}} = tf(h)$$

Donc

$$\frac{f(th) - f(0)}{t} = f(h)$$

et f admet en 0 une dérivée suivant tout vecteur $h \in \mathbb{R}^2$ qui vaut $f(h)$.
Par contre, si f était différentiable en 0, il existerait deux réels notés α et β tels que

$$f'(0)(h) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \alpha h_1 + \beta h_2$$

Mais, en posant comme au paragraphe 1

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'après la démonstration précédente,

$$f'(0)(e_1) = \alpha = f(e_1) = 0 \text{ et } f'(0)(e_2) = \beta = f(e_2) = 0$$

Ceci impliquerait que pour tout $h \in \mathbb{R}^2$, $f(h) = 0$ ce qui n'est pas vrai. f n'est donc pas différentiable en 0. ∎

Proposition 1.4.9. *Si f est dérivable en $a \in \mathbb{R}^n$, elle est aussi différentiable si on remplace les normes de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ par des normes équivalentes et $f'(a)$ ne change pas lors d'un tel remplacement.*

Démonstration : Il suffit de remarquer que, par définition de l'équivalence des normes, la quantité

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - f'(a)h\|}{\|h\|}$$

est majorée et minorée par une constante fois la même expression calculée avec les autres normes. ∎

Théorème 1.4.10. *(Composition avec une translation)*
Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $f : V \to F$ une application d'un voisinage V de a dans $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et f_0 l'application de $x_0 + V$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ telle que

$$\forall x \in x_0 + V \ , \ f_0(x) = f(x - x_0)$$

Alors, si f est différentiable en a, f_0 est différentiable en $a + x_0$ et

$$f_0'(a + x_0) = f'(a)$$

Démonstration : Si f est différentiable en a, on écrit

$$f_0(a + x_0 + h) - f_0(a + x_0) = f(a+h) - f(a) = f'(a)(h) + \|h\|\,\varepsilon(h)$$

avec $\varepsilon \to 0$ quand $h \to 0$.
D'où la différentiabilité de f_0 en $a + x_0$ et l'égalité $f_0'(a + x_0) = f'(a)$. ∎

Théorème 1.4.11. *(Composition avec une application linéaire)*
Soient $a \in E$ et $f : V \to \mathbb{R}^p$ une application d'un voisinage V de a dans $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, différentiable en a.

1) Si $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)$, $u \circ f$ est dérivable en a et

$$(u \circ f)'(a) = u \circ f'(a)$$

2) Si $v \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^q;\mathbb{R}^n)$ et si $v(b) = a$, $f \circ v$ est dérivable en b et

$$(f \circ v)'(b) = f'(a) \circ v$$

Démonstration : *1)* La relation

$$f(a+h) - f(a) - f'(a)(h) = \|h\| \, \varepsilon(h)$$

avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ entraine :

$$(u \circ f)(a+h) - (u \circ f)(a) - (u \circ f'(a))(h) = \|h\| \, \varepsilon_1(h)$$

avec $\varepsilon_1(h) = u \circ \varepsilon(h)$ et donc $\lim_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = 0$
2) On a

$$(f \circ v)(b+k) = f(a + v(k)) = f(a) + f'(a)\big(v(k)\big) + \|v(k)\| \, \varepsilon(v(k)) =$$

$$(f \circ v)(b) + (f'(a) \circ v)(k) + \|k\| \, \varepsilon_2(k)$$

avec $\|\varepsilon_2(k)\| \leq \|\varepsilon(v(k))\| \, \|v\| \to 0$ quand $k \to 0$. ■

Corollaire 1.4.12. *1) Si u est un isomorphisme de $\mathbb{R}^p$ dans lui-même, alors une condition nécessaire et suffisante pour que f soit différentiable en a est que $u \circ f$ soit différentiable en a.*

2) Si v est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même, une condition nécessaire et suffisante pour que f soit différentiable en a est que $f \circ v$ soit différentiable en $v^{-1}(a)$.

Le deux parties du théorème 1.4.11 ont des applications fondamentales, commençons par la propriété *1)* :

Définition 1.4.13. *Soit $f : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Pour tout $y \in (\mathbb{R}^p)^\star$, l'application*

$$x \to f^y(x) = y\big(f(x)\big) = y \circ f(x)$$

de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est appelée la fonction scalarisée de f.

Application 1.4.14. *(Scalarisation)*
Soit V un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$ et $f : V \to \mathbb{R}^p$. Si f est différentiable en a, alors pour tout $y \in (\mathbb{R}^p)^\star$, l'application $x \to f^y(x)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est différentiable en a et

$$\forall h \in \mathbb{R}^n \ , \ (f^y)'(a)(h) = y\big(f'(a)(h)\big) = \big(y \circ f'(a)\big)(h)$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème 1.4.11 à l'application linéaire $y \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^p)^\star$. ■

En appliquant ce résultat aux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^p$, on trouve le corollaire suivant, sur les coordonnées de f :

Corollaire 1.4.15. *Soit $f : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. On définit les coordonnées de f par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \ , \ f(x) = \begin{pmatrix} f^1(x) \\ f^2(x) \\ . \\ . \\ f^p(x) \end{pmatrix}$$

Alors si f est différentiable en a, pour tout $j = 1, 2, ..., p$, f^j est différentiable en a et

$$f'(a) = \begin{pmatrix} (f^1)'(a) \\ (f^2)'(a) \\ . \\ . \\ (f^p)'(a) \end{pmatrix}$$

Démonstration : En effet si y est le $j$ème vecteur de base, $f^y = f^j$. ∎

Remarque 1.4.16. *La réciproque de ce résultat est vraie, c'est à dire : si f^j est différentiable en a pour tout $j = 1, 2, ..., p$, f est différentiable en a et*

$$f'(a) = \begin{pmatrix} (f^1)'(a) \\ (f^2)'(a) \\ . \\ . \\ (f^p)'(a) \end{pmatrix}$$

Démonstration : En effet, il suffit de remarquer que

$$f = f^1 e_1 + f^2 e_2 + ... + f^p e_p$$

et appliquer les définitions. ∎

A cause de ces deux résultats, en étudiant chaque coordonnées de f séparément, on se ramènera toujours à des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

La propriété *2)* du théorème 1.4.11 a également une conséquence fondamentale :

Définition 1.4.17. *Soit $f : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Soit $a \in D$. Pour tout $i = 1, 2, ..., n$, l'application partielle de f en a, est la fonction d'une variable réelle définie par :*

$$t \to f(a + te_i)$$

En accord avec les notations du théorème 1.4.3, la dérivée de cette application en $t = 0$, est appelée dérivée partielle de f en a, selon le vecteur e_i et vaut $f'(a)(e_i)$. On notera $f'_i(a) = f'(a)(e_i)$ la fonction de a ainsi obtenue.

En utilisant la composition par les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ définies par $u_i(t) = a + te_i$, le théorème 1.4.11 implique le résultat suivant :

Application 1.4.18. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable en a, elle admet des dérivées partielles suivant tous les vecteurs de la base canonique, données par :*

$$f'_i(a) = f'(a)(e_i)$$

Remarque 1.4.19. *Contrairement au cas des applications coordonnées de f (1.4.15 et 1.4.16), la réciproque de ce théorème n'est pas vraie : la fonction f de l'exemple 1.4.8 n'est pas différentiable en 0 mais a des dérivées partielles en ce point.*

L'étude de la différentiabilité des fonctions de plusieurs variables ne se ramène donc pas à celle des fonctions d'une variable.

1.5 Vecteur tangent, gradient, matrice jacobienne.

Exemple 1.5.1. $f : V \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On retrouve la définition usuelle de la dérivabilité des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles.

Exemple 1.5.2. $f : V \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$.

Si f est différentiable en a, sa dérivée au point a, $f'(a)$ est un élément de$\mathscr{L}(\mathbb{R};\mathbb{R}^p)$. En termes de matrice, les éléments de$\mathscr{L}(\mathbb{R};\mathbb{R}^p)$ sont représentés par des matrices $p \times 1$, c'est à dire par des matrices colonne à p éléments. On peut donc l'identifier à un élément de $\mathbb{R}^p$.

Définition 1.5.3. *Si f est l'équation d'un arc paramétré de $\mathbb{R}^p$, on appellera $f'(a)$ le vecteur tangent à l'arc en a.*

Posons comme précédemment

$$f(x) = \begin{pmatrix} f^1(x) \\ f^2(x) \\ . \\ . \\ f^p(x) \end{pmatrix}$$

D'après le corollaire 1.4.15, on trouve que pour tout $j = 1, 2, ..., p$, la j-ème coordonnée de $f'(a)$ est la dérivée de la j-ème coordonnée f^j de f en a, ce qui s'écrit encore :

$$f'(a) = \begin{pmatrix} (f^1)'(a) \\ (f^2)'(a) \\ . \\ . \\ (f^p)'(a) \end{pmatrix}$$

Exemple 1.5.4. $f : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Si f est différentiable en a, sa dérivée au point a, $f'(a)$ est un élément de$\mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^\star$. En termes de matrice, les éléments de$\mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ sont représentés par des matrices $1 \times n$, c'est à dire par des matrices ligne à n éléments.

Soit $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors, par définition la i-ème dérivée partielle de f est égale à la valeur de la forme linéaire $f'(a)$ sur e_i. On a donc l'égalité :

$$f'_i(a) = f'(a)(e_i)$$

qui s'écrit encore dans ce cas :

$$f'(a) = \begin{pmatrix} f'_1(a) & f'_2(a) & . & . & . & f'_n(a) \end{pmatrix}$$

Définition 1.5.5. *La forme linéaire $f'(a)$ est appelée gradient de f en a.*

Revenons au cas général :

Définition 1.5.6. *Si $f : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en a, alors $f'(a) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Cette application linéaire est représentée par une matrice $p \times n$ à p lignes et n colonnes, appellée matrice jacobienne de f en a et notée $J_f(a)$.*

Soient f^j , $1 \leq j \leq p$ les coordonnées de l'application f. Alors, d'après le théorème de scalarisation 1.4.14 , on a :

$$(f'(a))^j = (f^j)'(a)$$

En d'autres termes, la j-ième coordonnée de la différentielle de f en a est égale à la différentielle de f^j en a.

D'autre part, d'après le corollaire 1.4.15, si $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors, par définition la i-ième dérivée partielle de $f'(a)$ est égale à la valeur de l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ $f'(a)$ sur e_i, c'est à dire

$$f'_i(a) = f'(a)(e_i)$$

Matriciellement, ceci s'exprime par la relation suivante :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} (f_1^1)'(a) & (f_2^1)'(a) & ... & (f_n^1)'(a) \\ (f_1^2)'(a) & (f_2^2)'(a) & ... & (f_n^2)'(a) \\ . & . & ... & . \\ . & & & \\ (f_1^p)'(a) & (f_2^p)'(a) & ... & (f_n^p)'(a) \end{pmatrix}$$

On peut aussi dire que les colonnes de $J_f(a)$ sont les dérivées partielles de f selon les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et que les lignes de f sont les dérivées des coordonnées de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Exemples 1.5.7. *1)* *L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ , \ f(x) = x_1 x_2$$

a pour matrice jacobienne :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

2) *L'application* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *telle que*

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ , \ f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

a pour matrice jacobienne :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

Démonstration : *1)* En effet, on peut écrire :

$$f_1'(a) = a_2 \text{ et } f_2'(a) = a_1$$

2) De la même façon, on écrit :

$$(f_1^1)'(a) = 1 \ , (f_2^1)'(a) = 1 \ , \ (f_1^2)'(a) = a_2 \ , \ (f_2^2)'(a) = a_1$$

■

1.6 Règles de différentiation

Théorème 1.6.1. *Soient* $a \in \mathbb{R}^n$ *et* V *un voisinage de* a *dans* $\mathbb{R}^n$*. Soient* f *et* g *deux fonctions définies de* V *dans* $\mathbb{R}^p$ *et* λ *et* μ *deux scalaires.*

Alors, si f *et* g *sont différentiables en* a*,* $\lambda f + \mu g$ *l'est aussi et*

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$$

Démonstration : Par hypothèse, on a

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)(h) + \varepsilon_1(h)\,\|h\| \text{ avec } \varepsilon_1(h) \to 0 \text{ quand } h \to 0$$

$$g(a+h) = g(a) + g'(a)(h) + \varepsilon_2(h)\,\|h\| \text{ avec } \varepsilon_2(h) \to 0 \text{ quand } h \to 0$$

D'où

$$(\lambda f + \mu g)(a+h) = (\lambda f + \mu g)(a) + \lambda f'(a)(h) + \mu g'(a)(h) + \lambda \varepsilon_1(h)\,\|h\| + \mu \varepsilon_2(h)\,\|h\|$$

En posant $\varepsilon(h) = \lambda\varepsilon_1(h) + \mu\varepsilon_2(h)$, on voit que $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$ et ceci prouve le théorème 1.6.1. ■

Théorème 1.6.2. *Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et V un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$. Soient f une fonction définie dans V à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et g une fonction définie dans un voisinage W de $f(a)$ dans $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^q$.*
Alors, si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, $g\circ f$ est différentiable en a et

$$(g\circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big)\circ f'(a)$$

Démonstration : Par définition de la différentiabilité de f en a, on a :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)(h) + \varepsilon_1(h)\,\|h\| \text{ avec } \varepsilon_1(h) \to 0 \text{ quand } h \to 0$$

ou encore en posant $k = f'(a)(h) + \varepsilon_1(h)\,\|h\|$ (k est donc un vecteur de $\mathbb{R}^p$),

$$f(a+h) = f(a) + k$$

En appliquant l'hypothèse de différentiabilité de g en $f(a)$, on peut écrire :

$$(g\circ f)(a+h) = g\big(f(a+h)\big) = g\big(f(a)+k\big) = g\big(f(a)\big) + g'\big(f(a)\big)(k) + \varepsilon_2(k)\,\|k\|$$

avec $\varepsilon_2(k) \to 0$ quand $k \to 0$
soit encore :

$$(g\circ f)(a+h) = g\big(f(a)\big) + g'\big(f(a)\big)\circ f'(a)(h) + \varepsilon_1(h)\,\|h\|) + \varepsilon_2(k)\,\|k\| =$$

$$(g\circ f)(a) + g'\big(f(a)\big)\circ f'(a)(h) + \varepsilon(h)\,\|h\|$$

avec

$$\varepsilon(h)\,\|h\| = g'\big(f(a)\big)\big(\varepsilon_1(h)\big)\,\|h\| + \varepsilon_2(k)\,\|f'(a)(h) + \varepsilon_1(h)\,\|h\|\|$$

D'où $\|\varepsilon(h)\| \leq \|g'(f(a)\|\,\|\varepsilon_1(h)\| + \|\varepsilon_2(k)\|\,\|\varepsilon_1(h)\|$.
Si $h \to 0$, alors $k \to 0$ et $\varepsilon_2(k) \to 0$, et par suite, $\varepsilon(h) \to 0$.
Ceci prouve le théorème 1.6.2. ■

Corollaire 1.6.3. *Soit f une application bijective de V dans W, différentiable ainsi que son inverse. Alors, en posant $b = f(a)$:*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \Big(f'\big(f^{-1}(b)\big)\Big)^{-1}$$

Application 1.6.4. *Si $f : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, et $g = W \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, où V est un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$ et W un voisinage de $f(a)$ dans $\mathbb{R}^p$, alors on a la relation suivante entre les matrices jacobiennes de f en a, de g en $f(a)$ et de $g\circ f$ en a :*

$$J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a))J_f(a)$$

Exemple 1.6.5. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application telle que*

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;,\; f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application telle que

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ , \ g(x) = x_1 x_2$$

Alors, $g{\circ}f$ a pour matrice jacobienne :

$$J_g\big(f(a)\big)J_f(a) = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1a_2 + a_2^2 & 2a_1a_2 + a_1^2 \end{pmatrix}$$

On vérifie directement que l'application $g{\circ}f$, définie par

$$g{\circ}f(x) = x_1x_2(x_1 + x_2)$$

admet pour dérivée

$$\big(g{\circ}f\big)'(a)(h) = (2a_1a_2 + a_2^2)h_1 + (2a_1a_2 + a_1^2)h_2$$

1.7 Théorème des Accroissements Finis.

Définition 1.7.1. *1) Une fonction f définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^n$ est dite différentiable sur D si elle est différentiable en tout point de D.*

2) La fonction $f' : D \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est appellée la dérivée de f sur D.

3) Si f est différentiable sur D et si sa dérivée f' est continue sur D on dira que f est continûment différentiable sur D. On dira aussi que f est de classe C^1 sur D.

Rappelons deux résultats classiques pour les fonctions d'une varaible réelle, à valeurs réelles :

Théorème 1.7.2. *(Théorème de Rolle)*
Soit f une fonction continue d'un intervalle $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f'(c) = 0$.

Théorème 1.7.3. *(Théorème des accroissements finis scalaire)*
Soit f une fonction continue d'un intervalle $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

On en déduit immédiatement un théorème des accroissements finis pour des fonction d'une variable vectorielle, à valeurs scalaires.

Théorème 1.7.4. *(Théorème des accroissements finis pour des fonctions à valeurs scalaires)*
Soit f une application différentiable d'un ouvert D de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si le segment $[a, a + h] \subset D$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$f(a + h) - f(a) = f'(a + \theta h)(h)$$

ce qui s'écrit aussi : il existe $c \in]a, a + h[$ tel que :

$$f(a + h) - f(a) = f'(c)(h)$$

Démonstration : On applique le théorème des accroissements finis scalaire 1.7.3 à la fonction $F(t) = f(a + th)$. Cette fonction est définie sur $[0, 1]$, dérivable sur $[0, 1]$ et $F'(t) = f'(a + th)(h)$. Il existe donc $c \in]a, a + h[$ tel que $F(1) - F(0) = F'(c)$, ce qui prouve le résultat. ∎

Remarque 1.7.5. *Le résultat précédent est faux si la fonction f est à valeurs dans un espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à 2.*

On peut à partir de ces résultats obtenir le théorème des accroissements finis pour les fonctions à valeurs vectorielles :

Théorème 1.7.6. *(Théorème des accroissements finis)*
Soit f une application différentiable dans un ouvert D de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Si $[a, a+h] \subset D$, on a :

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leq \|h\| \sup_{x \in]a, a+h[} \|f'(x)\|$$

DÉMONSTRATION : Soit $v \in (\mathbb{R}^p)^\star$. L'application $v \circ f : D \to \mathbb{R}$ telle que $v \circ f(x) = v(f(x))$ est une application différentiable (d'après le théorème 1.4.11 *1)*) sur D, à valeurs réelles. On peut donc écrire d'après le théorème 1.7.3 :

$$v \circ f(a+h) - v \circ f(a) = (v \circ f)'(a+\theta h)(h) = v \circ f'(a+\theta h)(h)$$

avec $\theta \in]0, 1[$ (qui dépend de v). D'où

$$v \circ f'(a+\theta h)(h) \leq \|v\| \, \|f'(a+\theta h)\| \, \|h\| \leq \|v\| \, \|h\| \sup\{\|f'(a+\theta h)\| \ \mid \theta \in]0, 1[\}$$

d'après les rappels sur les normes d'applictions linéaires (paragraphe 1.3.).
On en déduit donc :

$$\|f(a+h) - f(a)\| = \sup\{|v \circ f(a+h) - v \circ f(a)| \ \mid \ \|v\| \leq 1\} \leq$$
$$\|h\| \sup\{\|f'(a+\theta h)\| \ \mid \theta \in]0, 1[\}$$

et ceci prouve le théorème 1.7.6. ■

Corollaire 1.7.7. *Sous les mêmes hypothèses,*

1) *Si $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$,*

$$\|f(a+h) - f(a) - T(h)\| \leq \|h\| \sup\{\|f'(x) - T\| \ \mid x \in]a, a+h[\}$$

2)

$$\|f(a+h) - f(a) - f'(a)(h)\| \leq \|h\| \sup\{\|f'(x) - f'(a)\| \ \mid x \in]a, a+h[\}$$

3) *Si D est connexe et si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in D$, alors f est constante sur D.*

Pour démontrer la propriété *3)*, on utilisera l'équivalence suivante :
D est connexe si et seulement si il existe une ligne polygonale joignant deux points arbitraires de D.

Proposition 1.7.8. *Soit f une application différentiable dans un ouvert D de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Si f' est continue en a, on a, pour tous h et $k \in \mathbb{R}^n$:*

$$f(a+h) - f(a+k) = f'(a)(h-k) + \|h-k\|\,\varepsilon(h-k)$$

avec $\varepsilon \to 0$ quand $h, k \to 0$.

Définition 1.7.9. *Dans ce cas, on dit que f est strictement différentiable en a.*

Démonstration : Si l'on définit la fonction $\varepsilon(h,k)$ par la formule de l'énoncé, le corollaire 1.7.7 appliqué aux points $a+h$ et $a+k$ implique :

$$\|\varepsilon(h,k)\| \leq \sup\{\|f'(a+h) - f'(a+k+\theta(h-k))\| \mid \theta \in]0,1[\}$$

$$\leq \sup\{\|f'(x) - f'(a)\| \mid x \in]a, a+h[\} + \sup\{\|f'(y) - f'(a)\| \mid y \in]a+h, a+k[\}$$

Or si $h, k \to 0$, $x \to a$ et $y \to a$.
Comme par hypothèse, f' est continue en a, les deux quantités

$$\sup\{\|f'(x) - f'(a)\| \mid x \in]a, a+h[\} \text{ et } \sup\{\|f'(y) - f'(a)\| \mid y \in]a+h, a+k[\}$$

tendent vers 0, ce qui implique bien que $\varepsilon(h,k) \to 0$ quand $h, k \to 0$. ■

On peut maintenant énoncer un résultat fondamental et très pratique sur les fonctions de classe C^1 :

Théorème 1.7.10. *Soit f une application différentiable dans un ouvert D de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Alors, f est continûment différentiable sur D si et seulement si f admet en tout point $a \in D$, des dérivées partielles continues.*

Démonstration : Si f' existe sur D et est continue, il en est évidemment de même pour les f'_i.

Réciproquement, supposons que les f'_i existent et soient continues sur D. Pour simplifier, plaçons-nous dans le cas où $n = 2$, le cas général s'en déduit sans difficulté.
Soit $h \in \mathbb{R}^2$. On écrit :

$$f(a+h) - f(a) = f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2) =$$

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1+h_1, a_2) + f(a_1+h_1, a_2) - f(a_1, a_2)$$

On a, par définition de l'existence de f'_1 :

$$f(a_1+h_1, a_2) - f(a_1, a_2) = f'_1(a)(h_1) + \varepsilon_1(h)\,\|h_1\|$$

avec $\|\varepsilon_1(h)\| \to 0$ quand $h \to 0$.
Par la proposition 1.7.8 , on a :

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1+h_1, a_2) = f'_2(a)(h_2) + \varepsilon_2(h)\,\|h_2\|$$

avec $\|\varepsilon_2(h)\| \leq \sup_{\theta \in]0,1[} \|f'_2(a_1+h_1, a_2+\theta h_2) - f'_2(a_1, a_2)\|$.
Par hypothèse, f'_2 est continue donc $\varepsilon_1(h) \to 0$ quand $h \to 0$.

Donc
$$f(a+h)-f(a)=f_1'(a)(h_1)+f_2'(a)(h_2)+\|h_1\|\,\varepsilon_1(h)+\|h_2\|\,\varepsilon_2(h)$$
Ainsi f est différentiable en a et
$$f'(a)(h)=f_1'(a)(h_1)+f_2'(a)(h_2)$$
Comme de plus, f_1' et f_2' sont continues, il en est de même de f'. ■

1.8 Théorème des fonctions implicites

Définition 1.8.1. *Soit f une application de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On appelle fonction implicite définie par la relation $f(x,y)=0$, toute application g d'une partie A de $\mathbb{R}$ dans une partie B de $\mathbb{R}$ telle que, restreinte $A\times B$, la relation $f(x,y)=0$ soit équivalente à la relation $y=g(x)$.*

On peut maintenant énoncer le théorème des fonctions implicites :

Théorème 1.8.2. *Soit f une application d'un ouvert D de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.*
Soient $a,b\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tels que $f(a,b)=0$. On suppose de plus que f est continue sur D, que la dérivée partielle f_2' existe et est continue sur D et que $f_2'(a,b)\neq 0$.
Alors, il existe un voisinage A de a dans $\mathbb{R}$, un voisinage B de b dans $\mathbb{R}$ et une fonction continue g de A dans B, tels que la restriction à $A\times B$ de la relation $f(x,y)=0$ soit équivalente à la relation : $y=g(x)$.

Théorème 1.8.3. *Sous les hypothèses du théorème 1.8.2, on suppose de plus que f est différentiable en $(a,b)\in A\times B$ et que $f_2'(a,b)$ est un isomorphisme de F sur G.*
Alors, g est différentiable en a et
$$g'(a)=-(f_2'(a,b))^{-1}\circ f_1'(a,b)$$

Exemple 1.8.4. *On considère la courbe d'équation cartésienne $x(x^2+y^2)-(y^2-x^2)=0$.*
Posons $f(x,y)=x(x^2+y^2)-(y^2-x^2)$. Alors f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^2$ et :
$$f_1'(x,y)=3x^2+2x\ ,\ f_2'(x,y)=2(x-1)y$$
De plus, on a :
$$f_1'(x,y)=0\iff x=0\text{ ou }x=-\frac{2}{3}$$
$$f_2'(x,y)=0\iff x=1\text{ ou }y=0$$
Remarquons d'abord que l'équation $x(x^2+y^2)-(y^2-x^2)=y^2(x-1)+x^2(x+1)=0$ n'a de solution que si $-1\leq x<1$.

En tout point (a, b) tel que $b \neq 0$, $f_2'(a, b) \neq 0$ et par le théorème des fonctions implicites, cette courbe est représentée, au voisinage du point (a, b), par une équation $y = \varphi(x)$, avec φ de classe C^1 .

Au point $(-1, 0)$, $f_1'(-1, 0) \neq 0$ et par le théorème des fonctions implicites, cette courbe est représentée au voisinage de ce point par une équation $x = \psi(y)$, avec ψ de classe C^1.
En $(0, 0)$, le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas.

En dessinant la courbe, on constate qu'au point $(0, 0)$, il passe deux arcs de courbes distincts donc on ne peut pas représenter cette courbe par une équation du type précédent.

1.9 Notations différentielles

Dans la pratique, pour des fonctions à valeurs réelles, on utilisera des notations très suggestives, qui ont le très grand mérite de résumer les formules démontrées dans les paragraphes précédents.

Si f est une fonction différentiable de n variables $x_1, x_2, ..., x_n$, la différentielle de f sera notée df et on définit alors la relation suivante :

$$df(x_1, x_2, ..., x_n) =$$

$$f_1'(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1 + f_2'(x_1, x_2, ..., x_n)dx_2 + ... + f_n'(x_1, x_2, ..., x_n)dx_n$$

En particuliers, si $y - f(x) = 0$, on aura par convention :

$$dy = f'(x)dx$$

soit encore si $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Cette convention de notation permet de retrouver des règles de différentiation :

Règle de différentiation des fonctions composées :

Si $z = g(y)$ et $y = f(x)$, où f et g sont des fonctions différentiables, la dérivée de $g \circ f$ s'obtient en différentiant successivement les deux relations :

$$dz = g'(y)dy \ , \ dy = f'(x)dx$$

et en reportant la valeur de dy fournie par la deuxième formule dans la première formule :

$$dz = g'(y)f'(x)dx = g'\big(f(x)\big)f'(x)dx$$

et on retrouve ainsi la formule donnée au théorème 1.6.2.

Règle de différentiation des fonctions implicites :

Soit f une application de classe C^1 d'un ouvert D de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
En différentiant la relation $f(x,y)=0$, on trouve :

$$f_1'(x,y)dx + f_2'(x,y)dy = 0$$

Si pour $x=a$ et $y=b$, $f_2'(a,b)\neq 0$, alors la relation $f(x,y)=0$ définit implicitement une relation $y=g(x)$ dans un voisinage de (a,b) et la différentielle de g se calcule à partir de la différentielle de la formule précédente :

$$dy = -\big(f_2'(x,y)\big)^{-1} f_1'(x,y)dx$$

On retrouve de même la formule démontrée au théorème 1.8.2.

1.10 Différentielles secondes.

Définition 1.10.1. *1) Soit f une application continûment différentiable d'un ouvert D de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Si la dérivée f' de f est différentiable en $a\in D$, sa dérivée est appelée dérivée seconde de f en a et est notée $f''(a)$.*

2) Si pour tout $a\in D$, $f''(a)$ existe, on dira que f est deux fois différentiable sur D.

3) Si f'' existe et est continue sur D, on dira que f est deux fois continûment différentiable sur D ou de classe C^2.

On a vu dans le paragraphe 1.4 que pour tout $x\in D$, $f'(x)\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$. Donc f' est une application de $D\subset\mathbb{R}^n$ à valeurs dans$\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$. Par suite, la dérivée seconde de f est une application de $D\subset\mathbb{R}^n$, à valeurs dans$\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p))$.
C'est à dire :

$$\forall x\in D\ ,\ \forall h\in\mathbb{R}^n\ ,\ f''(x)(h)\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$$

et encore :

$$\forall x\in D\ ,\ \forall h\in\mathbb{R}^n\ ,\ \forall k\in E\ ,\ \big(f''(x)(h)\big)k\in\mathbb{R}^p$$

Pour comprendre la nature de ces espaces, on a besoin d'un lemme que l'on admettra :

Lemme 1.10.2. *Il existe une isométrie linéaire surjective de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p))$ dans $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$, espace des applications bilinéaires de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.*

Notations 1.10.3. *On identifiera toujours les espaces$\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p))$ et$\mathscr{B}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ et on le notera$\mathscr{B}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$. La dérivée seconde d'une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ apparaît ainsi comme un application d'un ouvert $D\subset\mathbb{R}^n$ dans$\mathscr{B}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$.*

Rappel 1.10.4. *On dira qu'un élément $u\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ est symétrique si*

$$\forall h,k\in\mathbb{R}^n\ ,\ u(h,k)=u(k,h)$$

Le résultat suivant exprime la symétrie de la dérivée seconde :

Théorème 1.10.5. *Soit f une application d'un ouvert D de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Si f est deux fois différentiable en $a \in D$, $f''(a)$ est une application bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.*

DÉMONSTRATION : Puisque D est ouvert, pour tout $h, k \in \mathbb{R}^n$, il existe $r > 0$ tel que

$$\forall |\lambda|, |\mu| \leq r \Rightarrow a + \lambda h + \mu k \in D$$

Posons, pour tout $t \in [-r, +r]$,

$$A = f\big(a + t(h + k)\big) - f(a + th) - f(a + tk) + f(a)$$

Alors

$$A = g(h) - g(0)$$

où

$$g(\xi) = f\big(a + t(\xi + k)\big) - f(a + t\xi)$$

En différentiant g, on trouve :

$$g'(\xi) = tf'\big(a + t(\xi + k)\big) - tf'(a + t\xi)$$

On a alors :

$$\big\|A - t^2 f''(a)(h, k)\big\| = \big\|g(h) - g(0) - t^2 f''(a)(h, k)\big\| \leq$$

$$\|h\| \sup_{\xi \in]0,h[} \big\|g'(\xi) - t^2 f''(a)(., k)\big\| =$$

$$\|h\| \sup_{\xi \in]0,h[} \big\|tf'\big(a + t(\xi + k)\big) - tf'(a + t\xi) - t^2 f''(a)(., k)\big\|$$

Par définition de f'' on a :

$$f'\big(a + t(\xi + k)\big) = f'(a) + tf''(a)(., \xi + k) + t\varepsilon_1(t, \xi) \|\xi + k\|$$

$$f'(a + t\xi) = f'(a) + tf''(a)(., \xi) + t\varepsilon_1(t, \xi) \|\xi\|$$

où $\varepsilon_1(t, \xi)$ et $\varepsilon_2(t, \xi) \to 0$ uniformément par rapport à ξ quand $t \to 0$. D'où :

$$\big\|A - t^2 f''(a)(h, k)\big\| \leq$$

$$\|h\| \sup_{\xi \in]0,h[} \big\|t^2 \varepsilon_1(t, \xi)\big\| \|\xi + h\| - t^2 \varepsilon_2(t, \xi) \|\xi + h\| \leq t^2 \varepsilon(t)$$

où $\varepsilon(t) \to 0$ quand $h \to 0$.
On déduit de ces inégalités que

$$\frac{A}{t^2} \to f''(a)(h, k)$$

lorsque $t \to 0$. Comme A est symétrique par définition par rapport à h et k, il en est de même de $f''(a)(h, k)$. ■

Dans le cas des fonctions à valeurs réelles, les dérivées seconde sont des applications bilinéaires à valeurs réelles, qui s'appellent des formes bilinéaires. Dans ce cas, nous avons une représentation maticielle très simple, que l'on admettra :

Proposition 1.10.6. *Représentation matricielle.*
Soit $b \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$. Il existe des coefficients a_{ij} , $0 \leq i, j \leq n$ tels que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \ , \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \ , \ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} \ , \ b(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j =$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & . & . & . & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

La forme bilinéaire est symétrique si et seulement si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $0 \leq i, j \leq n$, c'est à dire que la matrice des a_{ij} est symétrique.

Application 1.10.7. *Soit $f : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si $f''(a)$ existe, c'est une forme bilinéaire symétrique. Les coefficients de la matrice de $f''(a)$ sont par définition $f''(a)(e_i, e_j)$, c'est à dire les dérivées partielles de f par rapport à la ième variable puis par rapport à la jème variable. On notera cet élément $f''_{ij}(a)$. Par suite, si h et k sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, de coordonnées $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ . \\ . \\ h_n \end{pmatrix}$ et $k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ . \\ . \\ k_n \end{pmatrix}$, $f''(a)(h,k)$ s'écrit :*

$$f''(a)(h,k) = \sum_{i=1}^{n} f''_{ij}(a) h_i k_i$$

Remarque 1.10.8. *Le théorème 1.10.5 apparaît donc comme une généralisation du principe de symétrie de Schwarz, c'est à dire que pour tout $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$,*

$$f''_{ij}(a) = f''_{ji}(a)$$

Exemple 1.10.9. *Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par*

$$f(x,y) = 2x^2y - y^4$$

On a :

$$f'_1(a,b) = 4ab \ , \ f'_2(a,b) = 2a^2 - 4b^3 \ , \ f''_{11}(a,b) = 4b \ , \ f''_{12}(a,b) = 4a \ , \ f''_{22}(a,b) = -12b^2$$

L'application bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$, associée à la dérivée second $f''(a,b)$ est donc représentée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 4b & 4a \\ 4b & -12b^2 \end{pmatrix}$$

Ce qui s'écrit encore, pour $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ et $k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$:

$$f''(a,b)(h,k) = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4b & 4a \\ 4b & -12b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = 4bh_1k_1 + 4ah_2k_1 + 4ah_1k_2 - 12b^2k_1k_2$$

Remarque 1.10.10. *Les notations que nous avons utilisées ici peuvent être modifiées lorsqu'on se trouve dans une situation concrète, en particulier, lorsque f est une application de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Prenons le cas de $\mathbb{R}^3$: les coordonnées d'un vecteur se notent*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Les dérivées partielles de f sont notées

$$f'_x, f'_y, f'_z$$

ou encore

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$$

Les dérivées secondes s'écrivent de la même façon

$$f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{xz}, f''_{yy}, ..$$

ou encore

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \dots$$

2

INTÉGRALES MULTIPLES

Dans ce chapitre, on considère des fonctions, définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ce sont donc des fonctions de n variables que nous noterons : $f(t_1, t_2, ...t_n)$. On cherche à intégrer ces fonctions par rapport à ces n variables sur des domaines donnés de $\mathbb{R}^n$. Pour des raisons ensemblistes profondes, il n'est pas possible de définir l'intégrale de n'importe quelle fonction de n variables sur n'importe quel domaine de $\mathbb{R}^n$. On est obligé de se limiter à une classe de fonctions appelées fonctions boréliennes et à certains ensembles de $\mathbb{R}^n$ appelés ensembles boréliens. Nous allons étudier ces notions mais on peut déja se rassurer : il est très difficile de construire des fonctions non boréliennes ou des ensembles non boréliens et dans la pratique, toutes les fonctions que nous rencontrerons seront boréliennes et tous les ensembles seront boréliens.

2.1 Ensembles boréliens dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.1.1. *Un ensemble $\mathscr{T}$ de parties de $\mathbb{R}^n$ est appelé tribu s'il vérifie les propriétés suivantes :*

i) $A_1, A_2, ... \in \mathscr{T} \Rightarrow \cup_{i\geq 1} A_i \in \mathscr{T}$

ii) $A \in \mathscr{T} \Rightarrow A^c = \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathscr{T}$

Exemples 2.1.2. *1) l'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ de toutes les parties de $\mathbb{R}^n$ est une tribu.*

2) L'ensemble de tous les disques de $\mathbb{R}^2$ n'est pas une tribu. L'ensemble de toutes les boules de $\mathbb{R}^3$ n'est pas une tribu.

Les tribus possèdent les propriétés suivantes :

Proposition 2.1.3. *Soit $\mathscr{T}$ une tribu de $\mathbb{R}^n$. Alors :*

i) $A_1, A_2, ... \in \mathscr{T} \Rightarrow \cap_{i\geq 1} A_i \in \mathscr{T}$

ii) $A, B \in \mathscr{T}, B \subset A \Rightarrow A \setminus B \in \mathscr{T}$.

DÉMONSTRATION : *i)* On pose pour tout $i \geq 1$, $B_i = A_i^c$. Alors, B_i appartient à la tribu $\mathscr{T}$ et par définition, $\cup_{i\geq 1} B_i \in \mathscr{T}$. Or $\cup_{i\geq 1} B_i = \cup_{i\geq 1} A_i^c = \big(\cap_{i\geq 1} A_i\big)^c$. Donc par définition, $\cap_{i\geq 1} A_i = \big(\big(\cap_{i\geq 1} A_i\big)^c\big)^c$ appartient à $\mathscr{T}$.
ii) On écrit : $A \setminus B = A \cap B^c$. Comme A et B^c sont dans $\mathscr{T}$, leur intersection y est aussi. ■

Définition 2.1.4. *On appelle tribu borélienne sur $\mathbb{R}^n$, la plus petite tribu contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}^n$ et on note cette tribu $\mathscr{T}_n$. Les ensembles appartenant à la tribu borélienne s'appellent les ensembles boréliens.*

Rappelons qu'une partie U de $\mathbb{R}^n$ est ouverte si pour chaque point $\xi \in U$, il existe $r > 0$ tel que la boule $B(\xi, r)$ de centre ξ et de rayon r est incluse dans U. Un partie de $\mathbb{R}^n$ est fermée si c'est le complémentaire d'une partie ouverte.

On peut montrer que la tribu borélienne existe et qu'elle est strictement plus petite que l'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{R}^n$. Par contre, il est très difficile de construire une partie non borélienne de $\mathbb{R}^n$ et toutes celles que nous utiliserons seront boréliennes.

Par définition, la tribu borélienne contient tous les ouverts, tous les fermés et toutes les réunions dénombrables ou intersections dénombrables d'ouverts et de fermés. En particulier sur $\mathbb{R}$, la tribu borélienne contient tous les intervalles. Elle contient aussi des ensembles qui ne sont pas des intervalles ou des réunions d'intervalles, par exemple $\mathbb{Q}$.

En fait, ces tribus contiennent bien d'autres ensembles, mais nous n'en aurons pas l'usage ici.

Théorème 2.1.5. *Soit $\mathscr{T}_n$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^n$. Il existe une et une seule application $\lambda_n : \mathscr{T}_n \to \overline{\mathbb{R}^+}$ telle que :*

1) *Si $A_1, A_2, ...$ sont des ensembles boréliens disjoints,* $\lambda_n(\cup_{i\geq 1} A_i) = \sum_{i\geq 1} \lambda_n(A_i)$

2) $\forall a_k, b_k \in [-\infty, +\infty]$, $\lambda_n(\prod_{k=1}^n [a_k, b_k]) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$, *où nous conviendrons que* $0 \times \infty = 0$.

3) λ_n *est invariante par translation et par rotation.*

Nous admettrons ce théorème. Notons que $\lambda_n(\mathbb{R}^n) = +\infty$ mais que $\lambda_n(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) = 0$.

Définition 2.1.6. *L'application ci-dessus est appelée mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.*

Remarque 2.1.7. *Si $n = 1$, la valeur $\lambda_1(A)$ représente la longueur de A.*
Si $n = 2$, $\lambda_2(A)$ représente l'aire de A.
Si $n = 3$, $\lambda_3(A)$ représente le volume de A.
Pour n quelconque, on dira que $\lambda_n(A)$ est la mesure de A dans $\mathbb{R}^n$.

On peut montrer qu'une telle application λ_n n'existe pas sur l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^n$. Ceci est dû au fait qu'il existe des parties de $\mathbb{R}^n$ trop compliquées pour qu'on puisse calculer leur mesure.

Proposition 2.1.8. *1)* *Soient $A, B \in \mathscr{T}_n$ telles que $A \subset B$. Alors $\lambda_n(A) \leq \lambda_n(B)$.*

2) *Soient $A_1, A_2 ... \in \mathscr{T}_n$. Alors,* $\lambda_n(\cup_{i\geq 1} A_i) \leq \sum_{i\geq 1} \lambda_n(A_i)$.

DÉMONSTRATION : *1)* On écrit $B = A \cup (B \setminus A)$. Cette réunion est disjointe donc par le théorème 2.1.5, $\lambda_n(B) = \lambda_n(A) + \lambda_n(B \setminus A) \geq \lambda_n(A)$.

2) On définit de nouveaux ensembles de la façon suivante :
$A'_1 = A_1 \setminus (A_1 \cap \big(\cup_{i\geq 2} A_i \big)$, $A'_2 = A_2 \setminus (A_2 \cap \big(\cup_{i\geq 3} A_i \big)$ ... et ainsi de suite.
Alors : $\cup_{i\geq 1} A_i = \cup_{i\geq 1} A'_i$. De plus les A'_i sont disjoints et pour chaque $i = 1, 2...$, $A'_i \subset A_i$. Donc par le théorème 2.1.5 et la propriété *1)* ci-dssus :

$$\lambda_n\big(\cup_{i\geq 1} A_i \big) = \lambda_n\big(\cup_{i\geq 1} A'_i \big) = \sum_{i\geq 1} \lambda_n(A'_i) \leq \sum_{i\geq 1} \lambda_n(A_i)$$

■

Proposition 2.1.9. *Soit $A \in \mathscr{T}_n$ un borélien de $\mathbb{R}^n$, tel que A soit inclus dans un sous-espace affine de dimension $n-1$. Alors : $\lambda_n(A) = 0$.*

Cette proposition généralise l'idée intuitive que le volume d'une partie plane est nul, la surface d'une partie incluse dans une droite est nulle et la longueur d'un point est nulle.

Démonstration : Par définition, λ_n est invariante par translation et rotation. On peut donc supposer que le borélien A est inclus dans le sous espace $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Or, on a déja remarqué après le théorème 2.1.5 que $\lambda_n(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) = 0$, ce qui prouve la proposition 2.1.9. ■

2.2 Fonctions boréliennes de $\mathbb{R}^n$.

Définition2.2.1. *1) Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathscr{T}_n$. On dit que χ_A est la fonction caractéristique de l'ensemble A si elle est définie par :*

$$\chi_A(t_1, t_2, ..., t_n) = 0 \text{ si } (t_1, t_2, ..., t_n) \notin A \text{ et } \chi_A(t_1, t_2, ..., t_n) = 1 \text{ si } (t_1, t_2, ..., t_n) \in A$$

2) On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ est simple s'il existe $k \in \mathbb{N}$, des ensembles boréliens disjoints $A_1, A_2, ..., A_k$ de $\mathbb{R}^n$ et des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que

$$f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}$$

Ceci veut dire que la fonction f vaut α_i sur chaque A_i et 0 ailleurs. C'est une généralisation de la notion de fonctions en escalier sur $\mathbb{R}$, qui sont des fonctions de cette forme mais où les ensembles A_i sont des itervalles.

La proposition suivante est immédiate : c'est aussi un analogue de résultats classiques sur les fonctions en escalier sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2.2.2. *i) Les fonctions constantes sur $\mathbb{R}^n$ sont des fonctions simples.*

ii) Le module d'une fonction simple est une fonction simple.

iii) La somme et le produit de deux fonctions simples sont des fonctions simples.

Définition 2.2.3. *i) On dit qu'une fonction réelle f définie sur une partie de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ est borélienne si quel que soit $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble*

$$\{(t_1, t_2, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(t_1, t_2, ..., t_n) \leq a\}$$

est un ensemble borélien de $\mathbb{R}^n$*.*

ii) On dit qu'une fonction complexe f *définie sur une partie de* $\mathbb{R}^n$ *est borélienne si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.*

En particulier, on a évidemment :

Proposition 2.2.4. *Toute fonction simple sur* $\mathbb{R}^n$ *est une fonction borélienne.*

Dans la pratique, bien que l'on sache montrer l'existence de fonctions non boréliennes sur $\mathbb{R}^n$, il est très difficile d'en construire et nous ne rencontrerons que des fonctions boréliennes. En particulier, les fonctions continues ou encore continues par morceaux sont boréliennes. Aucune difficulté ne sera soulevée à ce sujet.

Donnons les propriétés essentielles des fonctions boréliennes, sans démonstration puisque cela ne nous servira pas dans la suite :

Proposition 2.2.5. *i) Le module d'une fonction borélienne est une fonction borélienne.*

ii) La somme et le produit de deux fonctions boréliennes sont des fonctions boréliennes.

iii) Toute fonction continue est borélienne.

iv) Si une suite de fonctions boréliennes $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers une fonction* f*, alors* f *est borélienne.*

Le résultat suivant est fondamental : il va nous permettre de définir l'intégrale des fonctions boréliennes sur des ensembles boréliens à partir de l'intégrale des fonctions simples.

Théorème 2.2.6. *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *une fonction borélienne positive sur* $\mathbb{R}^n$*. Il existe une suite* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *de fonctions simples sur* $\mathbb{R}^n$ *telles que* $\forall k \in \mathbb{N}, 0 \le f_k \le f$ *et qui converge simplement vers* f*.*

Démonstration : Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. On définit les ensembles suivants :

$$
\begin{aligned}
&A_0 = \{(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \le f(t_1, ..., t_n) < \frac{1}{k}\}\\
&A_1 = \{(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{k} \le f(t_1, ..., t_n) < \frac{2}{k}\}\\
&A_2 = \{(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n \mid \frac{2}{k} \le f(t_1, ..., t_n) < \frac{3}{k}\}\\
&...\\
&A_{k^2-1} = \{(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n \mid \frac{k^2-1}{k} \le f(t_1, ..., t_n) < k\}\\
&A_{k^2} = \{(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n \mid k \le f(t_1, ..., t_n)\}
\end{aligned}
$$

Soit f_k la fonction simple égale à $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{i}{k}\chi_{A_i}$ c'est à dire la fonction qui vaut $\dfrac{i}{k}$ sur A_i. Il est clair que pour tout k, $0 \le f_k \le f$. Montrons que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f : soit $(t_1, t_2, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$ fixé.

Si $f(t_1, t_2, ..., t_n) = +\infty$, alors $f_k(t_1, t_2, ..., t_n) = k$ et $f_k(t_1, t_2, ..., t_n) \to +\infty$.

Si $f(t_1, t_2, ..., t_n) < +\infty$, soit $k \ge f(t_1, t_2, ..., t_n)$. Il existe $i \le k$ tel que $(t_1, t_2, ..., t_n) \in A_i$ et alors $\dfrac{i}{k} \le f(t_1, ..., t_n) \le \dfrac{i+1}{k}$ et $f_k(t_1, t_2, ..., t_n) = \dfrac{i}{k}$. Donc

$$|f(t_1, ..., t_n) - f_k(t_1, ..., t_n)| \le \frac{1}{k}$$

Ceci prouve bien la convergence simple de $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers f.

2.3 Intégrales des fonctions boréliennes positives.

On commence par définir l'intégrale des fonctions simples positives, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$:

Définition 2.3.1. *Soit $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$, avec $a_i \in \overline{\mathbb{R}}$, $a_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, ..., k$ et où les A_i sont des boréliens de $\mathbb{R}^n$ deux à deux disjoints pour $i = 1, 2, ..., k$. On définit l'intégrale dans $\overline{\mathbb{R}}$ de f sur $\mathbb{R}^n$ par*

$$\iint ... \int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, t_2, ...t_n)\, dt_1 dt_2 ... dt_n = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_n(A_i)$$

où l'on convient que $0.\infty = 0$.

Montrons que cette intégrale est bien définie : il faut vérifier que si f s'écrit d'une autre façon $f = \sum_{i=1}^{l} b_i \chi_{B_i}$, où les B_i sont des boréliens de $\mathbb{R}^n$ deux à deux disjoints et $b_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, ..., k$, alors $\sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_n(A_i) = \sum_{i=1}^{l} b_i \lambda_n(B_i)$.
Pour cela, en considérant toutes les intersections $A_i \cap B_j$ pour $i = 1, ...k, j = 1, ...l$ on définit des boréliens deux à deux disjoints $C_i, i = 1, 2, ...m$ sur lesquels la fonction f est constante, égale à c_i. Il suffit alors de vérifier que chacune des deux quantités $\sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_n(A_i)$ et $\sum_{i=1}^{l} b_i \lambda_n(B_i)$ est égale à $\sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_n(C_i)$.
Prenons par exemple la première somme : comme chaque A_i est réunion disjointe d'un nombre fini de C_i, en appliquant la propriété *1)* du théorème 2.1.5, il est clair que ces deux sommes vont être les mêmes. Ceci s'applique de la même façon à la deuxième somme. Elles sont donc égales.

Remarque 2.3.2. *Soit A une partie borélienne de $\mathbb{R}^n$. Soit χ_A, la fonction caractéristique de A. Alors,*

$$\lambda_n(A) = \iint ... \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(t_1, t_2, ...t_n)\, dt_1 dt_2 ... dt_n$$

On peut maintenant définir l'intégrale des fonctions boréliennes positives :

Définition 2.3.3. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^+}$ une fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}^n$. Par le théorème 2.2.6, il existe une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions simples sur $\mathbb{R}^n$ telles que*

$\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq f_k \leq f$ et qui converge simplement vers f. On définit l'intégrale de f sur $\mathbb{R}^n$, comme étant la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ des intégrales des f_k sur $\mathbb{R}^n$, c'est à dire :

$$\iint \dots \int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, t_2, \dots t_n)\, dt_1 dt_2 \dots dt_n = \lim_{k \to +\infty} \iint \dots \int_{\mathbb{R}^n} f_k(t_1, t_2, \dots t_n)\, dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

On admettra que cette limite finie ou infinie existe et qu'elle est indépendante de la suite de fonctions simples $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant simplement vers f.

Montrons les propriétés principales des intégrales de fonctions boréliennes positives sur $\mathbb{R}^n$:

Proposition 2.3.4. *1) Soient f et $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^+}$ deux fonctions boréliennes positives sur $\mathbb{R}^n$ et λ et μ deux nombres réels positifs. Alors*

$$\iint \dots \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f + \mu g)(t_1, t_2, \dots t_n)\, dt_1 dt_2 \dots dt_n =$$

$$\lambda \iint \dots \int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, t_2, \dots t_n)\, dt_1 dt_2 \dots dt_n + \mu \iint \dots \int_{\mathbb{R}^n} g(t_1, t_2, \dots t_n)\, dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

2) Soient f et $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^+}$ deux fonctions boréliennes positives sur $\mathbb{R}^n$ telles que $f \leq g$. Alors

$$\iint \dots \int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, t_2, \dots t_n)\, dt_1 dt_2 \dots dt_n \leq \iint \dots \int_{\mathbb{R}^n} g(t_1, t_2, \dots t_n)\, dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

3) Si $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^+}$ est une fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}^n$, nulle en dehors d'un ensemble borélien A de mesure nulle. Alors

$$\iint \dots \int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, t_2, \dots t_n)\, dt_1 dt_2 \dots dt_n = 0$$

Démonstration : *1)* f est limite simple d'une suite de fonctions simples $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et g est limite de $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Par définition des intégrales des fonctions boréliennes positives, il suffit de vérifier cette propriété pour $\lambda f_k + \mu g_k$. Soient $(A_i)_{1\leq i\leq l}$ et $(B_j)_{1\leq j\leq m}$, les ensembles boréliens associés à f_k et g_k. Les deux fonctions f_k et g_k sont constantes sur les intersections $C_{ij} = A_i \cap B_j, 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m$.
En appliquant la définition 2.3.3 avec ces ensembles C_{ij}, la propriété de linéarité est évidente et ceci prouve la propriété *1)*.

2) g s'écrit $g = f + f_1$ où f_1 est une fonction borélienne positive. D'après *1)*, on a

$$\iint \dots \int_{\mathbb{R}^n} g(t_1, t_2, \dots t_n)\, dt_1 dt_2 \dots dt_n =$$

$$\iint \dots \int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, t_2, \dots t_n)\, dt_1 dt_2 \dots dt_n + \iint \dots \int_{\mathbb{R}^n} f_1(t_1, t_2, \dots t_n)\, dt_1 dt_2 \dots dt_n \geq$$

$$\iint \dots \int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, t_2, \dots t_n)\, dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

Donc

$$\iint \ldots \int_{\mathbb{R}^n} g(t_1, t_2, \ldots t_n)\, dt_1 dt_2 \ldots dt_n \geq \iint \ldots \int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, t_2, \ldots t_n)\, dt_1 dt_2 \ldots dt_n$$

3) Soit ϕ la fonction qui vaut $+\infty$ sur A et 0 ailleurs. On a $f \leq \phi$ et par la définition 2.3.1, ϕ est d'intégrale nulle. Donc d'après *2)*, f est aussi d'intégrale nulle. ■

Définition 2.3.5. *On dira qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^+}$ borélienne positive sur $\mathbb{R}^n$ est intégrable si son intégrale sur $\mathbb{R}^n$ est un nombre fini.*

Etudions les propriétés élémentaires des fonctions boréliennes positives intégrables sur $\mathbb{R}^n$:

Proposition 2.3.6. *1) Si f et $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^+}$ sont des fonctions boréliennes positives intégrables sur $\mathbb{R}^n$ et λ et μ des réels positifs, alors $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$.*

2) Si f et $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^+}$ sont des fonctions boréliennes positives sur $\mathbb{R}^n$ telles que $f \leq g$ et si g est intégrable sur $\mathbb{R}^n$, alors f l'est aussi.

3) Si $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^+}$ est une fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}^n$, bornée et nulle hors d'un ensemble borélien borné A, alors f est intégrable.

Démonstration : Les propriétés *1)* et *2)* sont des conséquences immédiates de la proposition 2.3.4.
Pour démontrer la propriété *3)*, on suppose que f est bornée par un réel M et que A est inclus dans un ensemble $B = \prod_{k=1}^{n} [a_k, b_k]$. On peut alors écrire : $f \leq M\chi_A \leq M\chi_B$. Or par définition de la mesure λ_n (théorème 2.1.5), la mesure de B est finie et donc l'intégrale de f aussi. ■

2.4 Intégrales des fonction boréliennes quelconques.

Définition 2.4.1. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction borélienne sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles. On appelle parties positive et négative de f les fonctions f^+ et f^- définies par :*
$f^+(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ *si* $f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \geq 0$
$f^+(t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0$ *si* $f(t_1, t_2, \ldots, t_n) < 0$
$f^-(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ *si* $f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \leq 0$
$f^-(t_1, t_2, \ldots, t_n) = 0$ *si* $f(t_1, t_2, \ldots, t_n) > 0$.

Il est immédiat que

$$f = f^+ - f^- \text{ et } |f| = f^+ + f^-$$

Définition 2.4.2. *1) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction borélienne sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles. On dit que f est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ si f^+ et f^- le sont.*

2) Si f est intégrable sur $\mathbb{R}^n$, on appelle intégrale de f sur $\mathbb{R}^n$ le nombre réel :

$$\iint \ldots \int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, t_2, \ldots t_n)\, dt_1 dt_2 \ldots dt_n =$$

$$\iint \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f^+(t_1, t_2, ...t_n)\, dt_1 dt_2...dt_n - \iint \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f^-(t_1, t_2, ...t_n)\, dt_1 dt_2...dt_n$$

Remarque 2.4.3. *Si $f \geq 0$, alors $f = f^+$ et $f^- = 0$ et on retrouve les résultats de la partie précédente.*

Une différence importante de ces intégrales par rapport aux intégrales de Riemann en dimension 1 est la suivante :

Proposition 2.4.4. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction borélienne sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles. Alors f est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $|f|$ l'est. De plus*

$$\left| \iint \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, t_2, ...t_n)\, dt_1 dt_2...dt_n \right| \leq \iint \cdots \int_{\mathbb{R}^n} |f(t_1, t_2, ...t_n)|\, dt_1 dt_2...dt_n$$

Démonstration : Si f est intégrable, par définition f^+ et f^- le sont aussi et par suite $|f| = f^+ + f^-$ est intégrable.
Réciproquement, si $|f|$ est intégrable, comme $0 \leq f^+ \leq |f|$ et $0 \leq f^- \leq |f|$, f^+ et f^- le sont aussi par la proposition 2.3.6 et f est bien intégrable.
De plus on écrit :

$$\left| \iint \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, t_2, ...t_n)\, dt_1 dt_2...dt_n \right| =$$

$$\left| \iint \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f^+(t_1, t_2, ...t_n)\, dt_1 dt_2...dt_n - \iint \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f^-(t_1, t_2, ...t_n)\, dt_1 dt_2...dt_n \right| \leq$$

$$\iint \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f^+(t_1, t_2, ...t_n)\, dt_1 dt_2...dt_n + \iint \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f^-(t_1, t_2, ...t_n)\, dt_1 dt_2...dt_n =$$

$$\iint \cdots \int_{\mathbb{R}^n} |f(t_1, t_2, ...t_n)|\, dt_1 dt_2...dt_n$$

■

En appliquant les résultats de la proposition 2.3.6 à f^+ et f^-, on obtient immédiatement les propriétés suivantes :

Proposition 2.4.5. *1) Si f et $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ sont des fonctions boréliennes sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles, intégrables sur $\mathbb{R}^n$ et λ et μ des réels, alors $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et de plus,*

$$\iint \cdots \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f + \mu g)(t_1, t_2, ...t_n)\, dt_1 dt_2...dt_n =$$

$$\lambda \iint \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, t_2, ...t_n)\, dt_1 dt_2...dt_n + \mu \iint \cdots \int_{\mathbb{R}^n} g(t_1, t_2, ...t_n)\, dt_1 dt_2...dt_n$$

2) Si f et $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ sont des fonctions boréliennes sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles telles que $|f| \leq |g|$ et si g est intégrable sur $\mathbb{R}^n$, alors f l'est aussi.

3) *Si $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction borélienne sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles, bornée et nulle hors d'un ensemble borélien borné A, alors f est intégrable.*

Proposition 2.4.6. *Soient f et $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions boréliennes sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles telles que $f = g$ sauf sur un ensemble borélien de mesure nulle N. Alors f est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si g l'est et dans ce cas :*

$$\iint \dots \int_{\mathbb{R}^n} f(t_1, t_2, \dots t_n)\, dt_1 dt_2 \dots dt_n = \iint \dots \int_{\mathbb{R}^n} g(t_1, t_2, \dots t_n)\, dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

Démonstration : On écrit $f = g+h$, où h est une fonction nulle sauf sur N. On décompose h en $h^+ + h^-$. Ces deux fonctions sont nulles en dehors de N et par application de la proposition *3)*, leurs intégrales sont nulles. h est donc d'intégrale nulle, ce qui prouve la proposition. ■

Définition 2.4.7. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ une fonction borélienne sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs complexes. On dira que f est intégrable si les fonctions réelles $\Re e\, f$ et $\Im m\, f$ le sont.*

Les propriétés des fonctions réelles intégrables passent sans difficulté au cas complexe, c'est à dire que, quitte à remplacer la valeur absolue par le module, ce qui ne change rien aux notations, dans les propositions 2.4.4, 2.4.5, 2.4.6, on peut supposer que les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{C}$.

2.5 Intégrales multiples sur des boréliens.

Définition 2.5.1. *1)* *Soit A un ensemble borélien de $\mathbb{R}^n$ et $f : A \to \overline{\mathbb{C}}$ une fonction définie dans A. On dit que f est borélienne si la fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(t_1, \dots t_n) = f(t_1, \dots t_n)$ si $(t_1, \dots t_n) \in A$ et $\tilde{f}(t_1, \dots t_n) = 0$ si $(t_1, \dots t_n) \notin A$ l'est.*

2) *On dit que f est intégrable dans A si $\tilde{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$.*

3) *Si f est positive ou si f est intégrable dans A, on appelle intégrale de f le nombre*

$$\iint \dots \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(t_1, \dots t_n)\, dt_1 \dots dt_n$$

On notera cette intégrale :

$$\iint \dots \int_{A} f(t_1, \dots t_n)\, dt_1 \dots dt_n$$

4) *Si B est un borélien tel que $B \subset A$, on appellera intégrale de f sur B et on notera*

$$\iint \dots \int_{B} f(t_1, \dots t_n)\, dt_1 \dots dt_n$$

le nombre

$$\iint \dots \int_{A} f\chi_B(t_1, \dots t_n)\, dt_1 \dots dt_n = \iint \dots \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}\chi_B(t_1, \dots t_n)\, dt_1 \dots dt_n$$

On vérifie aisément que les propositions 2.4.4, 2.4.5 et 2.4.6 restent valables pour les intégrales dans A.

Proposition 2.5.2. *Soient B et C deux ensembles boréliens disjoints tels que $A = B \cup C$ et $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ une fonction borélienne définie et intégrable dans A. Alors :*

$$\iint \dots \int_A f(t_1, \dots t_n)\, dt_1 \dots dt_n = \iint \dots \int_B f(t_1, \dots t_n) dt_1 \dots dt_n + \iint \dots \int_C f(t_1, \dots t_n)\, dt_1 \dots dt_n$$

Démonstration : En séparant partie positive et partie négative des parties réelle et imaginaire de f, il suffit de démontrer cette propriété pour $f \geq 0$. Soit $\tilde{f}$ définie comme ci-dessus. On écrit alors $\tilde{f} = \tilde{f}\chi_B + \tilde{f}\chi_C$. Or, on a les inégalités : $0 \leq \tilde{f}\chi_B \leq \tilde{f}$ et $0 \leq \tilde{f}\chi_C \leq \tilde{f}$. Donc $\tilde{f}\chi_B$ et $\tilde{f}\chi_C$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^n$ d'après la proposition 2.3.6 et on a :

$$\iint \dots \int_A f(t_1, \dots, t_n)\, dt_1 \dots dt_n = \iint \dots \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(t_1, \dots, t_n)\, dt_1 \dots dt_n =$$

$$\iint \dots \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}\chi_B(t_1, \dots, t_n)\, dt_1 \dots dt_n + \iint \dots \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}\chi_C(t_1, \dots, t_n)\, dt_1 \dots dt_n =$$

$$\iint \dots \int_B f(t_1, \dots t_n)\, dt_1 \dots dt_n + \iint \dots \int_C f(t_1, \dots t_n)\, dt_1 \dots dt_n$$

■

Remarque 2.5.3. *Dans le cas $n = 1$, on peut montrer que l'intégrale que nous venons de définir coïncide, dans le cas des fonctions dont la valeur absolue est Riemann-intégrable sur $\mathbb{R}$ avec leur intégrale de Riemann ou leur intégrale généralisée. C'est donc en particulier le cas des fonctions usuelles (continues, continues par morceaux...).*

2.6 Théorème de Fubini

Dans cette partie, on considérera seulement $n = 2$ et $n = 3$, le cas général est vrai également mais c'est un peu plus compliqué au niveau des notations.

Cas $n = 2$:

Soit f une fonction de deux variables réelles s et t. On peut démontrer que si f est borélienne sur $\mathbb{R}^2$, les fonctions d'une variable $t \to f(s,t)$ et $s \to f(s,t)$ sont boréliennes sur $\mathbb{R}$.

On peut alors énoncer le théorème de Fubini sur $\mathbb{R}^2$, que nous admettrons : on le démontre d'abord pour les fonctions simples, puis pour toutes les fonctions boréliennes positives par un passage à la limite en appliquant le théorème 2.2.6.

Théorème 2.6.1. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}^+}$ une fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}^2$. Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s,t)\, ds$$

Alors la fonction F est borélienne positive sur $\mathbb{R}$ et l'on a

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(s,t)\, dsdt = \int_{\mathbb{R}} F(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(s,t)\, ds \Big)\, dt$$

Bien entendu, on peut échanger les variables s et t et on obtient :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(s,t)\, dsdt = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(s,t)\, ds \Big)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(s,t)\, dt \Big)\, ds$$

Ce théorème montre alors deux choses : la première c'est que le calcul d'une intégrale double d'une fonction positive sur $\mathbb{R}^2$ se ramène au calcul de deux intégrales simples sur $\mathbb{R}$. La deuxième c'est que l'on peut changer l'ordre des deux intégrations simples.

En appliquant ce résultat à f^+ et f^-, on obtient ensuite :

Corollaire 2.6.2. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction borélienne sur $\mathbb{R}^2$, intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Alors la fonction*

$$t \to F(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s,t)\, ds$$

est borélienne intégrable sur $\mathbb{R}$ et de plus

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(s,t)\, dsdt = \int_{\mathbb{R}} F(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(s,t)\, ds \Big)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(s,t)\, dt \Big)\, ds$$

En particulier, ce résultat s'applique lorsque f est une fonction borélienne bornée, nulle hors d'un ensemble borélien borné.

Comme pour les fonctions boréliennes positives, on ramène donc le calcul d'une intégrale double à celui de deux intégrales simples. De plus, on peut de la même façon intervertir l'ordre des intégrations.

Cas $n = 3$:

Soit f une fonction de trois variables réelles s, t et u. On peut démontrer que si f est borélienne sur $\mathbb{R}^3$, les fonctions d'une variable $t \to f(s,t,u)$, $s \to f(s,t,u)$ et $s \to f(s,t,u)$ sont boréliennes sur $\mathbb{R}$.

On peut alors énoncer le théorème de Fubini sur $\mathbb{R}^3$:

Théorème 2.6.3. *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \overline{\mathbb{R}^+}$ une fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}^3$. Posons, pour tout $t, u \in \mathbb{R}$,*

$$F(t,u) = \int_{\mathbb{R}} f(s,t,u)\, ds$$

Alors la fonction F est borélienne positive sur $\mathbb{R}^2$ et l'on a

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(s,t,u)\, dsdtdu = \iint_{\mathbb{R}^2} F(t,u)\, dtdu = \iint_{\mathbb{R}^2} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(s,t,u) ds \Big)\, dtdu$$

Bien entendu, on peut échanger les variables s, t et u et on obtient :

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(s,t,u)\, dsdtdu = \iint_{\mathbb{R}^2} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(s,t)\, ds \Big)\, dtdu = \iint_{\mathbb{R}^2} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(s,t,u)\, dt \Big)\, dsdu$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(s,t,u)\, du \Big)\, dsdt$$

Le calcul de l'intégrale triple d'une fonction positive sur $\mathbb{R}^3$ se ramène au calcul d'une intégrale double sur $\mathbb{R}^2$ et d'une simple sur $\mathbb{R}$. On peut ensuite appliquer le théorème 2.6.1 sur $\mathbb{R}^2$ pour se ramener à trois intégrales simples successives. Bien entendu, on peut de la même façon changer l'ordre des trois intégrations simples.

En appliquant ce résultat à f^+ et f^-, on obtient de la même façon :

Corollaire 2.6.4. *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction borélienne sur $\mathbb{R}^3$, intégrable sur $\mathbb{R}^3$. Alors la fonction*

$$t, u \to F(t,u) = \int_{\mathbb{R}} f(s,t,u)\, ds$$

est borélienne intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et de plus

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(s,t,u)\, dsdtdu = \iint_{\mathbb{R}^2} F(t,u)\, dtdu = \iint_{\mathbb{R}^2} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(s,t,u)\, ds \Big)\, dtdu$$

En particulier, ce résultat s'applique lorsque f est une fonction borélienne bornée, nulle hors d'un ensemble borélien borné.

Comme pour les fonctions boréliennes positives, on ramène donc le calcul d'une intégrale triple à celui de deux intégrales, l'une simple et l'autre double. De plus, en appliquant le corollaire 2.6.2, on se ramène à trois intégrales simples et on peut de la même façon intervertir l'ordre des intégrations pour obtenir :

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(s,t,u)\, dsdtdu = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(s,t,u)\, ds \Big)\, dt \Big)\, du = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(s,t,u)\, dt \Big)\, du \Big)\, ds =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(s,t,u)\, du \Big)\, ds \Big)\, dt = ...$$

Remarque 2.6.5. *Ces résultats s'appliquent aussi aux fonctions boréliennes f définies dans un borélien A : en effet on applique les théorèmes de Fubuni aux fonctions $\tilde{f}$, prolongées par 0 hors de A, comme au paragraphe 5.*

Si $\tilde{f}\chi_A$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, on obtient les formules suivantes :

dans $\mathbb{R}^2$

$$\iint_A f(s,t)\, dsdt = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(s,t)\chi_A(s,t)\, dsdt$$

dans $\mathbb{R}^3$

$$\iiint_A f(s,t,u)\, dsdtdu = \iiint_{\mathbb{R}^3} \tilde{f}(s,t,u)\chi_A(s,t,u)\, dsdtdu$$

En particulier si A est un pavé, c'est à dire $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ dans $\mathbb{R}^2$ ou $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ dans $\mathbb{R}^3$, ces formules deviennent :

dans $\mathbb{R}^2$

$$\iint_A f(s,t)\,dsdt = \int_{a_2}^{b_2}\big(\int_{a_1}^{b_1} f(s,t)\,ds\big)\,dt$$

dans $\mathbb{R}^3$

$$\iiint_A f(s,t,u)\,dsdtdu = \int_{a_3}^{b_3}\big(\int_{a_2}^{b_2}\big(\int_{a_1}^{b_1} f(s,t,u)\,ds\big)\,dt\big)\,du$$

et l'ordre des intégrations est indifférent.

Lorsque A n'est pas un pavé, la décomposition en intégrales simples est plus délicate, comme vont nous le montrer les exemples suivants :

2.7 Exemples.

Exemple 2.7.1. *Soit A le triangle de $\mathbb{R}^2$ défini par : $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 2$. Calculer*

$$\iint_A \frac{dsdt}{(s+t+1)^2}$$

La fonction $s,t \to \dfrac{1}{(s+t+1)^2}$ est définie, continue et positive sur A. On cherche à intégrer la fonction $\dfrac{1}{(s+t+1)^2}\chi_A(s,t)$ sur $\mathbb{R}^2$.
En appliquant le théorème 2.6.1, on fixe t et on intègre sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$s \to \frac{1}{(s+t+1)^2}\chi_A(s,t)$$

Si $t \notin [0,2]$, cette fonction est nulle.
Si $t \in [0,2]$, la fonction à intégrer vaut $\dfrac{1}{(s+t+1)^2}$ si $s \in [0, 2-t]$ et 0 sinon.

La première intégrale simple est donc :

$$\int_0^{2-t} \frac{1}{(s+t+1)^2}\,ds = \Big[\frac{-1}{(s+t+1)}\Big]_0^{2-t} = \big(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{3}\big)$$

On a ensuite :

$$\iint_A \frac{dsdt}{(s+t+1)^2} = \int_0^2 \big(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{3}\big)\,dt = \big[\ln(t+1) - \frac{t}{3}\big]_0^2 = \big(\ln 3 - \frac{2}{3}\big)$$

Exemple 2.7.2. *Soit A le quart de boule de $\mathbb{R}^3$ défini par : $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ et $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Calculer*

$$\iiint_A 2stu\,dsdtdu$$

La fonction $s, t, u \to 2stu$ est continue sur A. Comme dans l'exemple précédent, la fonction à intégrer est la fonction $2stu\chi_A(s,t,u)$ sur $\mathbb{R}^3$.

Intégrons d'abord en u pour s et t fixés et soit B le quart de disque défini par $x \geq 0$, $y \geq 0$, et $x^2 + y^2 \leq 1$.

Si $s, t \notin B$, la fonction à intégrer est nulle.
Si $s, t \in B$, la fonction à intégrer vaut $2stu$ si $u \in [0, \sqrt{1 - s^2 - t^2}]$ et 0 sinon.

L'intégrale simple est donc :

$$\int_0^{\sqrt{1-s^2-t^2}} 2stu\,du = st(1 - s^2 - t^2)$$

Donc

$$\iiint_A 2stu\,dsdtdu = \iint_B st(1 - s^2 - t^2)\,dsdt$$

En appliquant le raisonnement de l'exemple précédent dans $\mathbb{R}^2$, on trouve

$$\iiint_A 2stu\,dsdtdu = \iint_B st(1 - s^2 - t^2)\,dsdt = \int_0^1 t\Big(\int_0^{\sqrt{1-t^2}} [s(1-t^2) - s^3]\,ds\Big)\,dt =$$

$$\int_0^1 t\Big[\frac{s^2}{2}(1-t^2) - \frac{s^4}{4}\Big]_0^{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{1}{4}\int_0^1 t(1-t^2)^2\,dt = \frac{1}{4}\int_0^1 (t - 2t^3 + t^5)\,dt =$$

$$\frac{1}{4}\Big[\frac{t^2}{2} - \frac{2t^4}{4} + \frac{t^6}{6}\Big]_0^1 = \frac{1}{4}\big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\big) = \frac{1}{24}$$

2.8 Calcul des surfaces dans $\mathbb{R}^2$

Soit A un borélien de $\mathbb{R}^2$. Par définition, la surface de A est $\lambda_2(A)$. C'est aussi l'intégrale de la fonction caractéristique χ_A de A, qui vaut 1 dans A et 0 hors de A.
Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ telles que $f_1 \leq f_2$. Soit A l'ensemble défini par les équations,

$$x \in I\ ,\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$$

Par application du calcul des intégrales doubles, on trouve

$$\lambda_2(A) = \iint_{\mathbb{R}} \chi_A(s,t)\,dsdt = \int_I \Big(\int_{f_1(s)}^{f_2(s)} dt\Big)\,ds = \int_I \big(f_2(s) - f_1(s)\big)\,ds$$

Exemple 2.8.1. *Calculons la surface limitée par l'ellipse d'équation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

On cherche la surface du domaine A représenté par les équations

$$-a \leq x \leq +a \ , \ \frac{-b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

D'après le résultat précédent, on a :

$$\lambda_2(A) = \int_{-a}^{+a} \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - s^2}\, ds = \frac{2b}{a}\int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - s^2}\, ds$$

Dans cette intégrale simple, on fait le changement de variables $s = a\cos\theta$

$$\lambda_2(A) = \frac{2b}{a}\int_{\pi}^{0} \sqrt{a^2 - a^2(\cos\theta)^2}(-a\sin\theta)\, d\theta = 2ab\int_0^{\pi} (\sin\theta)^2\, d\theta =$$

$$2ab\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\, d\theta = \pi ab$$

Ces calculs de surface permettent d'obtenir une extension de la proprosition 2.1.9 :

Corollaire 2.8.2. *Si f est une fonction réelle continue, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, son graphe qui est la courbe d'équation $y = f(x)$ est de surface nulle dans $\mathbb{R}^2$.*

Démonstration : Il suffit d'appliquer la formule précédente avec $f = f_1 = f_2$. ■

Corollaire 2.8.3. *Soit Γ un lacet simple de classe C^1, K le domaine ouvert limité par Γ et $A = K \cup \Gamma$. Alors si $\overline{f}\chi_A$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$:*

$$\iint_A f(s,t)\, dsdt = \iint_K f(s,t)\, dsdt$$

En particulier,

$$\lambda_2(A) = \lambda_2(K)$$

Démonstration : L'ensemble Γ est de mesure nulle d'après le corollaire 2.8.2 donc ceci est une conséquence de la proposition 2.4.6 *3)*. ■

Grâce à ce résultat, lorsqu'un domaine de $\mathbb{R}^2$ sera donné comme le domaine intérieur limité par un lacet, on ne distinguera pas le domaine ouvert ou le domaine fermé limité par ce lacet.

2.9 Calcul des volumes dans $\mathbb{R}^3$.

On peut utiliser deux décompositions d'une intégrale triple en une intégrale double et une simple ou l'inverse. Ceci donne deux calculs différents :

Premier calcul :

Soit B un borélien de $\mathbb{R}^2$ et f_1, f_2 deux fonctions boréliennes définies sur B telles que $f_1 \leq f_2$. Soit A le borélien de $\mathbb{R}^3$ défini par les équations :

$$(x,y) \in B \ , \ f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)$$

Alors, comme dans le cas $n = 2$, on peut calculer le volume de A par l'intégrale triple sur $\mathbb{R}^3$ de la fonction caractéristique χ_A :

$$\lambda_3(A) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \chi_A(s,t,u)\, dsdtdu = \iint_B \Big(\int_{f_1(s,t)}^{f_2(s,t)} du\Big)\, dsdt = \iint_B \big(f_2(s,t) - f_1(s,t)\big)\, dsdt$$

Deuxième calcul :

Soit maintenant A un borélien de $\mathbb{R}^3$. Pour tout $z \in \mathbb{R}$, soit A_z l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x,y,z) \in A$. Alors A est défini par les équations

$$z \in \mathbb{R} \ , \ (x,y) \in A_z$$

Comme ci-dessus, le volume de A est l'intégrale de χ_A sur $\mathbb{R}^3$. On peut intégrer de la façon suivante :

$$\lambda_3(A) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \chi_A(s,t,u)\, dsdtdu = \int_{\mathbb{R}} \Big(\iint_{A_u} dsdt\Big)\, du = \int_{\mathbb{R}} \lambda_2(A_u)\, du$$

Exemple 2.9.1. *On considère l'ellipsoïde d'équation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

et on cherche à calculer le volume A limité par cet ellipsoïde :

Pour calculer le volume de A, on utilise d'abord la première technique : soit B le domaine de $\mathbb{R}^2$ d'équations

$$-a \leq x \leq +a \ , \ \frac{-b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

le domaine A est l'ensemble des triplets (x,y,z) tels que

$$(x,y) \in B \ , \ -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \leq z \leq c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

Le volume de A est donnée par :

$$\lambda_3(A) = \iint_B 2c\sqrt{1 - \frac{s^2}{a^2} - \frac{t^2}{b^2}}\, dsdt$$

Nous reprendrons ce calcul après l'étude des changements de variables dans les intégrales multiples.

Essayons la deuxième technique : Si $|z| \geq c$, l'ensemble des points (x, y) tels que $(x, y, z) \in A$ est vide ou réduit à un point, donc $\lambda_2(A_z) = 0$.

Supposons $|z| < c$ et posons $d^2 = 1 - \frac{z^2}{c^2}$. Alors l'ensemble A_z est l'ensembles des couples (x, y) tels que

$$\frac{x^2}{(ad)^2} + \frac{y^2}{(bd)^2} \leq 1$$

C'est l'intérieur d'une ellipse dont la surface est πabd^2 d'après l'exemple 2.8.1. Le volume de A est donc

$$\lambda_3(A) = \int_{-c}^{+c} \pi ab(1 - \frac{u^2}{c^2})du = \pi ab[u - \frac{u^3}{3c^2}]_{-c}^{+c} = \frac{4}{3}\pi abc$$

Corollaire 2.9.2. *Si f est une fonction réelle continue, définie sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$, son graphe qui est la surface d'équation $z = f(x, y)$ est de volume nul dans $\mathbb{R}^3$.*

Démonstration : Il suffit d'appliquer la formule précédente, donnée par le premier calcul, avec $f = f_1 = f_2$. ∎

Corollaire 2.9.3. *Soit Σ une surface fermée simple de classe C^1, K le domaine ouvert limité par Σ et $A = K \cup \Sigma$. Alors si $\overline{f}\chi_A$ est intégrable sur $\mathbb{R}^3$:*

$$\iiint_A f(s, t, u)\, dsdtdu = \iiint_K f(s, t, u)\, dsdtdu$$

En particulier,

$$\lambda_3(A) = \lambda_3(K)$$

Démonstration : L'ensemble Σ est de mesure nulle d'après le corollaire 2.9.2 donc ceci est une conséquence de la proposition 2.4.6 *3)*. ∎

Comme précédemment, grâce à ce résultat, lorsqu'un domaine de $\mathbb{R}^3$ sera donné comme le domaine intérieur limité par une surface fermée, on ne distinguera pas le domaine ouvert ou le domaine fermé limité par cette surface.

2.10 Changement de variables dans les intégrales multiples.

Soient A et A' deux parties ouvertes de $\mathbb{R}^n$ et ϕ un difféomorphisme de classe C^1 de A sur A', c'est à dire une application bijective, de classe C^1 ainsi que son inverse.

Pour $(t_1, t_2, ...t_n) \in A$, soient $\begin{pmatrix} \phi_1(t_1, t_2, ...t_n) \\ \phi_2(t_1, t_2, ...t_n) \\ . \\ . \\ \phi_n(t_1, t_2, ...t_n) \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\phi(t_1, t_2, ...t_n)$.

On rappelle que l'application linéaire dérivée de ϕ en $(t_1, t_2, ..., t_n)$, $\phi'(t_1, t_2, ...t_n)$, est l'application linéaire bijective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de matrice :

$$J_\phi(t_1, ..., t_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial t_1}(t_1, t_2, ...t_n) & \frac{\partial \phi_1}{\partial t_2}(t_1, t_2, ...t_n) & . & . & \frac{\partial \phi_1}{\partial t_n}(t_1, t_2, ...t_n) \\ . & & & & \\ . & & & & \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial t_1}(t_1, t_2, ...t_n) & \frac{\partial \phi_n}{\partial t_2}(t_1, t_2, ...t_n) & . & . & \frac{\partial \phi_n}{\partial t_n}(t_1, t_2, ...t_n) \end{pmatrix}$$

appelée matrice jacobienne de ϕ.
Le Jacobien $D_\phi(t_1, t_2, ...t_n)$ de ϕ au point $(t_1, t_2, ...t_n) \in A$ est le déterminant de l'application linéaire $\phi'(t_1, t_2, ...t_n)$ ou ce qui revient au même de la matrice Jacobienne de ϕ, J_ϕ.
Notons que si $\phi : A \to A'$ est un difféomorphisme de classe C^1, alors

$$\forall (t_1, t_2, ..., t_n) \in A \ , \ D_\phi(t_1, t_2, ..., t_n) \neq 0$$

Il n'est pas difficile de montrer, mais nous l'admettrons, qu'un sous-ensemble B de A est un borélien si et seulement si $B' = \phi(B)$ est un borélien de A' et qu'une fonction f est borélienne sur A' si et seulement si $f \circ \phi$ est borélienne sur A.

Nous admettrons le théorème suivant :

Théorème 2.10.1. *Soit $(t'_1, t'_2, ..., t'_n) \to f(t'_1, t'_2, ..., t'_n)$ une fonction borélienne intégrable sur $B' = \phi(B)$. Alors, $(t_1, t_2, ..., t_n) \to (f \circ \phi)(t_1, t_2, ..., t_n) \, |D_\phi(t_1, ..., t_n)|$ est intégrable sur B et*

$$\iint ... \int_{B'} f(t'_1, ..., t'_n) \, dt'_1 ... dt'_n = \iint ... \int_B (f \circ \phi)(t_1, ..., t_n) \, |D_\phi(t_1, t_2, ..., t_n)| \, dt_1 ... dt_n$$

En particulier, on peut appliquer ce théorème aux transformations affines bijectives. Le Jacobien d'une telle transformation est constant égal au déterminant de l'application linéaire associée.

Lorsque la fonction à intégrer est la fonction caractéristique d'un borélien, on obtient la valeur de la mesure de son transformé par une application affine :

Corollaire 2.10.2. *Soit A un borélien de $\mathbb{R}^n$, ϕ une transformation affine de $\mathbb{R}^n$ et ℓ l'application linéaire associée. Alors :*

$$\lambda_n\big(\phi(A)\big) = |det(\ell)| \, \lambda_n(A)$$

Démonstration : Si ϕ n'est pas bijective, c'est à dire si ℓ n'est pas bijective, $\phi(A)$ est inclus dans un sous espace affine de $\mathbb{R}^n$ de dimension strictement plus petite que n et par la proposition 2.1.9, $\lambda_n\big(\phi(A)\big) = 0$. Le résultat du corollaire 2.10.2 est donc bien vérifié puisque $det(\ell) = 0$.

Si ϕ est bijective, ℓ est bijective et on va appliquer la formule de changement de variable à ϕ^{-1}. Le Jacobien de ϕ^{-1} est constant égal à $det(\ell)^{-1}$ et, en remarquant que $\chi_{\phi(A)} = \chi_A \circ \phi^{-1}$, on a :

$$\lambda_n\big(\phi(A)\big) = \iint ... \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\phi(A)}(t_1, ..., t_n) \, dt_1 ... dt_n =$$

$$|det(\ell)| \iint ... \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A \circ \phi^{-1}(t_1, ..., t_n) \, \big|det(\ell)^{-1}\big| \, dt_1 ... dt_n =$$

$$|det(\ell)| \iint ... \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(t'_1, ...t'_n) \, dt'_1 ... dt'_n = |det(\ell)| \, \lambda_n(A)$$

■

Corollaire 2.10.3. *La mesure λ_n est invariante par rotation sur $\mathbb{R}^n$.*

DÉMONSTRATION : Une rotation est une transformation linéaire, de déterminant ± 1. Il suffit donc d'appliquer le corollaire 2.10.2. ■

Exemple 2.10.4. *On cherche à calculer le volume d'un parallélépipède de $\mathbb{R}^n$ de côtés $OM_1, OM_2, ..., OM_n$, où les points M_i ont pour coordonnées dans $\mathbb{R}^n$:* $\begin{pmatrix} a_1^i \\ a_2^i \\ . \\ . \\ a_n^i \end{pmatrix}$.

On remarque que ce parallélépipède est le transformé du cube unité de $\mathbb{R}^n$ par la transformation linéaire de matrice

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & . & . & .a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & . & . & .a_2^n \\ . & & & & \\ . & & & & \\ a_n^1 & a_n^2 & . & . & .a_n^n \end{pmatrix}$$

En effet, cette application transforme le i ème vecteur de base de $\mathbb{R}^n$ en OM_i. Le volume de ce parallélépipède est donc égal au déterminant de cette matrice.

Exemple 2.10.5. *On reprend le calcul de l'intégrale double de l'exemple 2.9.1*

$$\iint_B 2c\sqrt{1 - \frac{s^2}{a^2} - \frac{t^2}{b^2}}\, dsdt$$

On fait le changement de variable $\begin{cases} t = a\cos\theta\cos\tau \\ s = b\sin\theta\cos\tau \end{cases}$ pour $(\theta, \tau) \in D =]0, 2\pi[$ x $]0, \frac{\pi}{2}[$, qui est bien un difféomorphisme de classe C^1 de D sur l'intérieur de B (voir les corollaires et 2.9.2).

Le Jacobien de cette transformation est le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} -a\sin\theta\cos\tau & -a\cos\theta\sin\tau \\ b\cos\theta\cos\tau & -b\sin\theta\sin\tau \end{pmatrix}$$

c'est à dire $ab\sin\tau\cos\tau$.

Alors cette intégrale vaut :

$$\iint_B 2c\sqrt{1 - \frac{s^2}{a^2} - \frac{t^2}{b^2}}\, dsdt = \iint_{]0,2\pi[\times]0,\frac{\pi}{2}]} 2abc\sqrt{1 - (\cos\tau)^2}\sin\tau\cos\tau\, d\theta d\tau =$$

$$2abc\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\tau)^2\cos\tau\, d\tau\Big)\, d\theta = 4\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\tau)^2\cos\tau\, d\tau = 4\pi abc\big[(\sin\tau)^3\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi abc}{3}$$

On retrouve bien le résultat voulu. ■

Examinons les cas particuliers des dimensions 1, 2 et 3 :

Cas où n=1

On rerouve la formule de changement de variables dans les intégrales simples. En effet, soit $[a, b]$ et $[c, d]$ deux intervalles de $\mathbb{R}$ et ϕ une application bijective de $[c, d]$ dans $[a, b]$. Supposons que ϕ' existe et est continue. Le Jacobien de ϕ dans ce cas est la fonction ϕ' et donc par le théorème 2.10.1, on a :

$$\int_a^b f(s)\,ds = \int_c^d f\circ\phi(t)\,|\phi'(t)|\;dt$$

Deux cas se présentent :

ou bien $\phi' > 0$; alors ϕ est croissante et $\phi(c) = a, \phi(d) = b$. On a donc :

$$\int_a^b f(s)\,ds = \int_{\phi(c)}^{\phi(b)} f(s)\,ds = \int_c^d f\circ\phi(t)\phi'(t)\,dt$$

ou bien $\phi' < 0$; alors ϕ est décroissante et $\phi(c) = b, \phi(d) = a$. On a donc :

$$\int_a^b f(s)\,ds = -\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(s)\,ds = -\int_c^d f\circ\phi(t)\phi'(t)\,dt$$

Dans les deux cas, on retrouve la formule classique du changement de variables dans les intégrales simples.

Cas où n=2

On va étudier la transformation ϕ qui représente le passage en coordonnées polaires. Cette transformation est définie par les équations :

$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$ pour $(r, t) \in D = \mathbb{R}^+ \text{ x }]0, 2\pi[$.

Son Jacobien est le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} -r\sin t & \cos t \\ r\cos t & \sin t \end{pmatrix}$$

c'est à dire $-r$.

En appliquant le théorème 2.10.1, on obtient donc la formule de changement de variables :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,dxdy = \iint_D f(r\cos t, r\sin t)r\,drdt$$

Exemple 2.10.6. *Surface d'un secteur rectiligne.*

On considère une fonction f définie, positive et continue sur un intervalle $[t_1, t_2]$ de $\mathbb{R}$. On cherche la surface de l'ensemble

$$A = \{(r, t) \mid t_1 \le t \le t_2, 0 \le r \le f(t)\}$$

Par application du résultat précédent, on voit que

$$\lambda_2(A) = \iint_A dxdy = \int_{t_1}^{t_2} \big(\int_0^{f(t)} r\,dr\big)\,dt = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\,dt$$

Exemple 2.10.7. *On cherche à calculer l'intégrale généralisée*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$$

Pour cela, on calcule l'intégrale double :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(s^2+t^2)}\, dsdt$$

Cette intégrale vaut d'une part par passage en coordonnées polaires :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(s^2+t^2)}\, dsdt = \int_0^{2\pi} \big(\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\, dr\big)\, dt = \pi \lim_{r\to+\infty} (1 - e^{-r^2}) = \pi$$

D'autre part, cette intégrale vaut aussi

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(s^2+t^2)}\, dsdt = \big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt\big)^2$$

On en déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

Cas où n=3

On va étudier d'abord le passage en **coordonnées cylindriques**. La transformation est définie par les équations : $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \quad \text{pour } (t,r,z) \in D =]0,2\pi[\text{ x } \mathbb{R}^+ \text{ x } \mathbb{R}. \\ z \end{cases}$

Son Jacobien est le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} -r\sin t & \cos t & 0 \\ r\cos t & \sin t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est à dire $-r$.

On obtient donc la formule :

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint_D f(r\cos t, r\sin t, z) r\, drdtdz$$

Exemple 2.10.8. *On cherche à intégrer la fonction $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ sur la boule B de centre 0 et de rayon R.*

Il s'agit de calculer

$$\iiint_B (x^2 + y^2)\, dxdydz$$

Par passage en coordonnées cylindriques, on a :

$$\iiint_B (x^2+y^2)\,dxdydz = \int_{-R}^{+R} \big(\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \big(\int_0^{2\pi} r^3\,dt\big)\,dr\big)\,dz = \frac{\pi}{2}\int_{-R}^{+R} (R^2-z^2)^2\,dz = \frac{8\pi R^5}{15}$$

Etudions maintenant le passage en **coordonnées sphériques**. La transformation est définie par les équations : $\begin{cases} x = r\cos t\cos s \\ y = r\sin t\cos s \\ z = r\sin s \end{cases}$ pour $(t,r,s) \in D =]0,2\pi[$ x $\mathbb{R}^+$ x $]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

Son Jacobien est le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} -r\sin t\cos s & \cos t\cos s & -r\cos t\sin s \\ r\cos t\cos s & \sin t\cos s & -r\sin t\sin s \\ 0 & \sin s & \cos s \end{pmatrix}$$

c'est à dire $-r^2\cos s$.

On obtient donc la formule :

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_D f(r\cos t\cos s, r\sin t\cos s, r\sin s) r^2\cos s\,drdtds$$

Exemple 2.10.9. *Soit $a > R > 0$. On cherche à calculer l'intégrale de la fonction $f(x,y,z) = \dfrac{1}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^2}$ sur la boule de centre 0 et de rayon R.*

Il s'agit de calculer l'intégrale

$$\iiint_B \frac{dxdydz}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{1/2}}$$

Par passage en coordonnées sphériques, on trouve :

$$\iiint_B \frac{dxdydz}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{1/2}} = \int_0^R \big(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \big(\int_0^{2\pi} \frac{r^2\sin t}{[r^2+a^2-2ar\cos t]^{1/2}}\,dt\big)\,ds\big)\,dr =$$

$$2\pi\int_0^R \frac{(a+r)-(a-r)}{a} r\,dr = \frac{4\pi R^3}{3a}$$

3

PROPRIÉTÉS MÉTRIQUE DES ARCS PARAMÉTRÉS

3.1 Définitions.

Dans tout ce chapitre, E sera l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$. Dans le cas des arcs plans, on considérera que $\mathbb{R}^2$ est plongé dans $\mathbb{R}^3$ et que la troisième coordonnée d'un arc de $\mathbb{R}^2$ est identiquement nulle.
Tous les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ de ce chapitre pourront avoir des bornes infinies.

Définition 3.1.1. *1) Un arc régulier orienté Γ de E est défini par un intervalle ouvert $I =]a_0, b_0[$ de $\mathbb{R}$ et une application $f : I =]a_0, b_0[\to E$ de classe C^1, injective et à dérivée non nulle en tout point $t \in I$. L'arc Γ est l'image de I par f, c'est à dire : $\Gamma = f(I)$. On dit alors que f est une paramétrisation de Γ. Γ est aussi le lieu des points $M(t)$ tels que $OM(t) = f(t)$, où O est l'origine du repère, parcouru dans le sens $M(a_0) \to M(b_0)$. Pour $k \geq 2$, on dira que Γ est de classe C^k si f est de classe C^k.*

2) Un changement de paramétrisation est défini par un intervalle ouvert $I' =]a'_0, b'_0[$ et une application bijective croissante $\gamma :]a'_0, b'_0[\to]a_0, b_0[$, de classe C^1 ainsi que son inverse. Un changement de paramétrage laisse invariant tout arc orienté Γ. On dira que γ est un changement de paramétrage de classe C^k si γ est de classe C^k ainsi que son inverse.

Remarque 3.1.2. *L'application $g = f \circ \gamma :]a'_0, b'_0[\to E$ est une paramétrisation de Γ.*

En effet, il suffit de vérifier que g a des dérivées non nulles en tout point $u \in]a'_0, b'_0[$. Or, $\forall u \in]a'_0, b'_0[, g'(u) = (f \circ \gamma)'(u) = f'\big(\gamma(u)\big)\gamma'(u) \neq 0$.

Définition 3.1.3. *1) Soit Γ un arc régulier orienté. On appellera $\overline{\Gamma}$, l'arc régulier orienté égal à Γ , parcouru en sens inverse. Si f est une paramétrisation de Γ sur l'intervalle $]a_0, b_0[$, $\overline{\Gamma}$ est paramétré par la fonction $t \to f(-t + a_0 + b_0)$ sur l'intervalle $]a_0, b_0[$.*

2) Un changement d'orientation est défini par un intervalle ouvert $I' =]a'_0, b'_0[$ et une application bijective décroissante $\gamma :]a'_0, b'_0[\to]a_0, b_0[$, de classe C^1 ainsi que sont inverse. Un changement d'orientation transforme un arc orienté Γ en $\overline{\Gamma}$.

Remarque 3.1.4. *Un arc Γ de $\mathbb{R}^2$, paramétré par une équation cartésienne $y = \phi(x)$, où ϕ est de classe C^1, est toujours un arc régulier.*

En effet, avec les notations précédentes, on écrit le paramétrage de Γ :

$$f(x) = \begin{pmatrix} x \\ \phi(x) \end{pmatrix}$$

et alors

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \phi'(x) \end{pmatrix} \neq 0$$

Définition 3.1.5. *Soit Γ un arc régulier orienté, paramétré par f :$]a_0, b_0[\to E$. On appelle tangente à Γ au point $M(t)$ tel que $OM(t) = f(t)$, la droite orientée T_t d'équation paramétrique*

$$\lambda \in \mathbb{R} \to \ell(\lambda) = f(t) + \lambda f'(t)$$

T_t est donc le lieu des points $P(\lambda)$ tels que $OP(\lambda) = OM(t) + \lambda f'(t)$, c'est à dire que c'est une droite passant par le point $M(t)$ et de vecteur directeur $f'(t)$.

Proposition 3.1.6. *1) La tangente T_t en un point $M(t)$ à un arc paramétré régulier orienté Γ est invariante par un changement de paramétrage.*

2) La tangente T_t en un point $M(t)$ à un arc paramétré Γ est changée en $\overline{T_t}$ par un changement d'orientation.

Démonstration : *1)* Soit $]a_0, b_0[\to f(t)$ un paramétrage de l'arc régulier orienté Γ et γ :$]a'_0, b'_0[\to]a_0, b_0[$ un changement de paramétrage de Γ et soit $g = f \circ \gamma$ le nouveau paramétrage de Γ. La tangente T_t a pour équation avec le paramétrage initial

$$\ell(\lambda) = f(t) + \lambda f'(t)$$

En posant $t = \gamma(u)$, l'équation de la tangente avec le nouveau patramétrage est :

$$\ell_0(\lambda) = g(u) + \lambda g'(u) = f\big(\gamma(u)\big) + \lambda[f\big(\gamma(u)\big)]' = f(t) + \lambda f'(t)\gamma'(u)$$

Comme $\gamma'(u) \neq 0$, en changeant λ en $\lambda\gamma'(u)$, cette équation est aussi l'équation de la tangente à Γ avec le paramétrage initial. Comme $\gamma'(u) > 0$, le sens de parcours n'est pas modifié et la tangente orientée est bien invariante par changement de paramétrage.

2) Le même calcul, avec les mêmes notations montre que si γ est un changement d'orientation, la tangente à $\overline{\Gamma}$ en un point est égale à la tangente à γ en ce point, parcourue en sens inverse. ■

Exemples 3.1.7. *1) L'ellipse d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ est un arc paramétré orienté défini par la paramétrisation*

$$t \in]0, 2\pi[\to \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

2) L'hyperbole d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ est la réunion de deux arcs paramétrés orientés d'équations :

$$t \in \mathbb{R} \to \begin{cases} x = a\cosh t \\ y = b\sinh t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \to \begin{cases} x = -a\cosh t \\ y = b\sinh t \end{cases}$$

3) La parabole d'équation cartésienne $y^2 - 2px = 0$ est un arc paramétré orienté défini par la paramétrisation

$$y \in \mathbb{R} \to \begin{cases} x = \dfrac{y^2}{2p} \\ y \end{cases}$$

Dans les trois cas, on vérifie que le vecteur dérivé ne s'annulle pas.

3.2 Longueur d'un arc régulier.

Dans cette partie, on se place dans $E = \mathbb{R}^3$ (ou dans $\mathbb{R}^2$ plongé dans $\mathbb{R}^3$) comme précédemment. On suppose de plus que E est muni du produit scalaire euclidien usuel, que l'on notera $< .,. >$. On notera aussi $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

Proposition 3.2.1. *Soit Γ un arc orienté régulier, défini sur un intervalle $]a_0, b_0[$ par la paramétrisation $t \to f(t) \in \mathbb{R}^3$. Soit $[a,b] \subset]a_0, b_0[$. L'intégrale*

$$\int_a^b \|f'(t)\| \, dt$$

est invariante par changement de paramétrage ou changement d'orientation de Γ.

On remarquera que, puisque la fonction f est de classe C^1, $\|f'\|$ est continue et donc intégrable sur un intervalle fermé borné $[a,b]$.

Démonstration : Soit $\gamma :]a_0', b_0'[\to]a_0, b_0[$, un changement de paramétrage ou un changement d'orientation de Γ et posons $g = f \circ \gamma$. Alors, si on fait le changement de variable $t = \gamma(u)$, et si on pose $c = \gamma^{-1}(a)$ et $d = \gamma^{-1}(b)$, on trouve :

$$\int_a^b \|f'(t)\| \, dt = \int_c^d \left\| f'\big(\gamma(u)\big) \right\| \gamma'(u) du$$

Si γ est changement de paramétrage, $\gamma'(u) > 0$ et on a l'égalité :

$$\left\| f'\big(\gamma(u)\big) \right\| \gamma'(u) = \left\| f'\big(\gamma(u)\big) \gamma'(u) \right\| = \|g'(u)\|$$

D'où

$$\int_a^b \|f'(t)\| \, dt = \int_c^d \|g'(u)\| \, du$$

Si γ est changement d'orientation, $\gamma'(u) < 0$ et on a l'égalité :

$$\left\| f'\big(\gamma(u)\big) \right\| \gamma'(u) = - \left\| f'\big(\gamma(u)\big) \gamma'(u) \right\| = - \|g'(u)\|$$

D'où

$$\int_a^b \|f'(t)\| \, dt = - \int_c^d \|g'(u)\| \, du = \int_d^c \|g'(u)\| \, du$$

■

Définition 3.2.2. *1) On appelle longueur de l'arc Γ entre les points a et b, et on note $s_{[a,b]}(\Gamma)$, l'intégrale*

$$s_{[a,b]}(\Gamma) = \int_a^b \|f'(t)\| \, dt$$

2) Si la limite lorsque $a \to a_0$ et $b \to b_0$ de $s_{[a,b]}(\Gamma)$ existe, on appellera longueur de Γ et on notera $s(\Gamma)$, l'intégrale généralisée

$$s(\Gamma) = \int_{a_0}^{b_0} \|f'(t)\| \, dt$$

Notation 3.2.3. *En utilisant les notations différentielles, on exprimera la relation ci-dessus par la formule :*

$$ds = \|f'(t)\| \, dt$$

Calcul pratique du ds :

En coordonnées cartésiennes :

Si f est un paramétrage de Γ, pour chaque $t \in]a_0, b_0[$, on appellera $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ les coordonnées du vecteur $f(t)$ dans $\mathbb{R}^3$. Alors,

$$\|f'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

On écrit cette relation symboliquement de la façon suivante :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

En particulier si Γ est un arc plan, en prenant $z = 0$, on trouve l'expression de ds en coordonnées cartésiennes dans $\mathbb{R}^2$:

$$\|f'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

De la même façon, on écrit cette relation symboliquement :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

En coordonnées cylindriques :

Pour $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, on écrit $x(t) = r(t)\cos\theta(t), y(t) = r(t)\sin\theta(t)$ et $z(t) = z(t)$. Alors

$$\|f'(t)\|^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 =$$

$$\big(r'(t)\cos\theta(t) - r(t)\sin\theta(t)\theta'(t)\big)^2 + \big(r'(t)\sin\theta(t) + r(t)\cos\theta(t)\theta'(t)\big)^2 + z'(t)^2 =$$

$$r'(t)^2 + r(t)^2\theta'(t)^2 + z'(t)^2$$

On écrit symboliquement cette relation

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

En particulier si Γ est un arc plan, en prenant $z = 0$ dans ces relations, on trouve l'expression de ds en coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$:

$$\|f'(t)\|^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2 =$$
$$\big(r'(t)\cos\theta(t) - r(t)\sin\theta(t)\theta'(t)\big)^2 + \big(r'(t)\sin\theta(t) + r(t)\cos\theta(t)\theta'(t)\big)^2 =$$
$$r'(t)^2 + r(t)^2\theta'(t)^2$$

On écrit symboliquement cette relation

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

En coordonnées sphériques :

Pour $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, on écrit $x(t) = r(t)\cos\theta(t)\cos\phi(t), y(t) = r(t)\sin\theta(t)\cos\phi(t)$ et $z(t) = r(t)\sin\phi(t)$. Alors

$$\|f'(t)\|^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 =$$
$$\big(r'(t)\cos\theta(t)\cos\phi(t) - r(t)\sin\theta(t)\theta'(t)\cos\phi(t) - r(t)\cos\theta(t)\sin\phi(t)\phi'(t)\big)^2 +$$
$$\big(r'(t)\sin\theta(t)\cos\phi(t) + r(t)\cos\theta(t)\theta'(t)\cos\phi(t) - r(t)\sin\theta(t)\sin\phi(t)\phi'(t)\big)^2 +$$
$$\big(r'(t)\sin\phi(t) + r(t)\cos\phi(t)\phi'(t)\big)^2 =$$
$$r'(t)^2 + r(t)^2\phi'(t)^2 + r(t)^2\big(\cos\phi(t)\big)^2\theta'(t)^2$$

On écrit symboliquement cette relation

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + r^2(\cos\phi)^2 d\theta^2$$

Exemple 3.2.4. *Soit Γ l'ellipse paramétrée par* $\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}$ *, pour $t \in]0, 2\pi[$.*

En utilisant la formule donnant ds en coordonnées cartésiennes, on trouve :

$$ds^2 = [a^2(\sin t)^2 + b^2(\cos t)^2]dt^2$$

D'où

$$s(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(\sin t)^2 + b^2(\cos t)^2}dt$$

Exemple 3.2.5. *On considère la lemniscate de Bernouillis d'équation polaire, pour $\theta \in]0, 2\pi[$*

$$r = a\cos 2\theta$$

On calcule ds par la formule donnée en coordonnées polaires :

$$ds^2 = [\big(r'(\theta)\big)^2 + \big(r(\theta)\big)^2]d\theta^2 = [4a^2(\sin 2\theta)^2 + a^2(\cos 2\theta)^2]d\theta^2 = a^2[1+3(\sin 2\theta)^2]d\theta^2$$

On obtient donc

$$s(\Gamma) = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1+3(\sin 2\theta)^2}d\theta$$

Interprétation géométrique du ds.

Soit Γ un arc régulier orienté, défini par un paramétrage $t \in]a_0, b_0[\to f(t)$ et soit $[a,b] \in]a_0, b_0[$. On cherche à calculer la longueur de l'arc Γ entre les points a et b. Pour cela, on découpe l'intervalle $[a,b]$ en définissant une subdivision σ de la façon habituelle : $a = a_1 < a_2 < ... < a_k = b$.
Pour chaque $i = 1, 2, ...k$, on définit le point M_i par : $OM_i = f(a_i)$. On définit l'arc Γ_σ comme étant la ligne polygonale joignant les points $M_i, i = 1, 2, ..., k$.
On sait calculer la longueur de l'arc Γ_σ :

$$s_{[a,b]}(\Gamma_\sigma) = \sum_{i=1}^{k-1} \|M_{i+1}M_i\| = \sum_{i=1}^{k-1} \|f(a_{i+1}) - f(a_i)\|$$

Par le théorème des accroissements finis, pour tout $i = 1, 2, ...k$ il existe $b_i \in [a_i, a_{i+1}]$ tel que : $f(a_{i+1}) - f(a_i) = (a_{i+1} - a_i)f'(b_i)$. Donc

$$s_{[a,b]}(\Gamma_\sigma) = \sum_{i=1}^{k-1}(a_{i+1} - a_i)\|f'(b_i)\|$$

Lorsque le pas de la subdivision σ tend vers 0, l'arc Γ_σ se rapproche de l'arc Γ. D'autre part,

$$s_{[a,b]}(\Gamma_\sigma) = \sum_{i=1}^{k-1}(a_{i+1} - a_i)\|f'(b_i)\| \to \int_a^b \|f'(t)\|\, dt = s_{[a,b]}(\Gamma)$$

3.3 Paramétrage normal, courbure.

Définition 3.3.1. *Soit Γ un arc régulier orienté. On dira que le paramétrage*

$$t \in]a_0, b_0[\to f(t) \in E$$

est un paramétrage normal de Γ si $\forall t \in]a_0, b_0[$, $\|f'(t)\| = 1$.

Théorème 3.3.2. *Soit Γ un arc régulier orienté paramétré par $t \in]a_0, b_0[\to f(t) \in E$. Soit $t_0 \in]a_0, b_0[$ fixé. On pose, pour tout $t \in]a_0, b_0[$:*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|f'(u)\|\, du$$

La fonction $\gamma = s^{-1}$ d'un intervalle I dans $]a_0, b_0[$, définit un changement de paramétrage de Γ. Le paramétrage ainsi obtenu est un paramétrage normal de Γ.

Démonstration : Puisque par définition, $f'(t) \neq 0$ en tout point $t \in]a_0, b_0[$, la fonction s est strictement croissante sur $]a_0, b_0[$. Elle est donc inversible et la fonction γ est bien définie et est également strictement croissante. De plus, on a : $s'(t) = \|f'(t)\|$ et par suite, pour $s = s(t)$ ou de façon équivalente $t = \gamma(s)$,

$$\gamma'(s) = \frac{1}{\|f'(t)\|} = \frac{1}{\|f'\big(\gamma(s)\big)\|} > 0$$

γ est donc bien un changement de paramétrage.

Soit $g = f\circ\gamma$ le nouveau paramétrage de γ. On a :

$$g'(s) = [f\circ\gamma(s)]' = f'\big(\gamma(s)\big)\gamma'(s) = \frac{f'\big(\gamma(s)\big)}{\|f'\big(\gamma(s)\big)\|}$$

On a donc bien $\forall s \in I$, $\|g'(s)\| = 1$ et g est un paramétrage normal de Γ. ∎

Définition 3.3.3. *La fonction $t \in]a_0, b_0[\to s(t)$ définie au théorème 3.3.2 s'appelle l'abscisse curviligne de Γ au point t, d'origine t_0.*

Il est clair que deux abscisses curvilignes d'origines différentes, diffèrent d'une constante.

Définition 3.3.4. *1) Soit Γ un arc régulier orienté de classe C^2, paramétré par le paramétrage normal $s \in I \to g(s) \in E$. On appelle vecteur unitaire tangent à Γ au point $M(s)$ tel que $OM(s) = g(s)$ le vecteur unitaire $\tau(s) = g'(s)$.*

2) On appelle courbure de Γ au point $M(s)$ le nombre positif $\rho(s) = \|g''(s)\|$.

3) Si $\rho(s) = 0$, on dira que $M(s)$ est un point d'inflexion de Γ.

4) Si $\rho(s) \neq 0$, on appellera rayon de courbure de Γ en $M(s)$ le nombre $R(s) = \dfrac{1}{\rho(s)}$.

On remarquera que le vecteur unitaire tangent à Γ ne dépend pas du paramétrage normal et est changé en son opposé si l'on change l'orientation de Γ. La courbure est invariante par changement d'orientation.

Proposition 3.3.5. *Soit Γ un arc régulier orienté de classe C^2, paramétré par le paramétrage normal $s \in I \to g(s) \in E$. Alors, pour tout $s \in I$,*

$$< g'(s), g''(s) >= 0$$

Démonstration : Par définition, pour tout $s \in I$, $\|g'(s)\| = 1$. On peut alors écrire :

$$0 = [\|g'(s)\|^2]' = [< g'(s), g'(s) >]' = 2 < g''(s), g'(s) >$$

∎

Définition 3.3.6. *1) Soit Γ un arc régulier orienté de classe C^2, sans point d'inflexion, paramétré par le paramétrage normal $s \in I \to g(s) \in E$. On appelle vecteur unitaire normal principal à Γ au point $M(s)$ tel que $OM(s) = g(s)$ le vecteur unitaire*

$$\nu(s) = \frac{g''(s)}{\rho(s)} = \frac{1}{\rho(s)}\frac{d\tau(s)}{ds}$$

2) On dira que le plan passant par $M(s)$ et engendré par les vecteurs $\tau(s)$ et $\nu(s)$ est le plan osculateur à Γ en $M(s)$. Si $E = \mathbb{R}^2$, ce plan est toujours le plan de Γ.

3) On appellera centre de courbure de Γ en $M(s)$ le point $I(s)$ tel que

$$M(s)I(s) = R(s)\nu(s)$$

On remarquera que le vecteur unitaire normal principal à Γ ne dépend pas du paramétrage normal et est invariant si l'on change l'orientation de Γ. Le plan osculateur est aussi invariant par changement d'orientation.

Exemple 3.3.7. *Soit Γ le cercle de centre O et de rayon a, parcouru dans le sens trigonométrique.*

On paramètre Γ par $t \in]0, 2\pi[\to f(t) = \begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = a\sin t \end{cases}$

Alors : $ds^2 = \big(x'(t)^2 + y'(t)^2\big)dt^2 = \big(a^2(\cos t)^2 + a^2(\sin t)^2\big)dt^2 = a^2dt^2$

Donc un paramétrage normal de Γ, conservant l'orientation est : $ds = adt$. On peut prendre par exemple $s = at$. De plus, $\dfrac{d^2s}{dt^2} = 0$.

On a alors :

$$f'(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \end{pmatrix}, \text{ d'où } \tau(s) = \begin{pmatrix} -\sin\frac{s}{a} \\ \cos\frac{s}{a} \end{pmatrix} \text{ et } \frac{d\tau}{ds}(s) = \rho(s)\nu(s) = \begin{pmatrix} -1/a\ \cos\frac{s}{a} \\ -1/a\ \sin\frac{s}{a} \end{pmatrix}$$

Par suite $\rho(s) = \dfrac{1}{a}$.

On en déduit que la courbure est constante égale à $1/a$. Le rayon de courbure est donc le rayon du cercle et le centre de courbure est le centre du cercle.

Exemple 3.3.8. *Soit Γ un arc régulier orienté paramétré par un paramétrage normal g sur I. Supposons que la courbure de Γ soit identiquement nulle sur I.*

Alors, par définition , on a $g''(s) = 0$ pour tout $s \in I$, c'est à dire que la fonction g est affine : il existe deux vecteurs fixés u et v tels que $\forall s \in I$, $g(s) = u + sv$.

On en déduit que les arcs à courbure nulle sont les droites affines.

Calcul de la courbure.

On suppose que l'arc régulier orienté Γ de classe C^2 est donné par un paramétrage quelconque $t \in]a_0, b_0[\to f(t)$. Soit $t \to s(t)$ une abscisse curviligne de Γ. Alors, on peut écrire :

$$ds = \|f'(t)\|\, dt$$

et en dérivant la fonction f, on trouve les formules suivantes :

$$f'(t) = \tau(s)\frac{ds}{dt}$$

$$f''(t) = \rho(s)\nu(s)(\frac{ds}{dt})^2 + \tau(s)\frac{d^2s}{dt^2}$$

Rappel sur le produit vectoriel.

Pour calculer la courbure d'un arc régulier orienté de classe C^2, on rappelle la définition du produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$: si u et v sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, il existe un unique vecteur de $\mathbb{R}^3$, noté $u \wedge v$ tel que quel que soit le vecteur $w \in \mathbb{R}^3$,

$$det(u, v, w) = < u \wedge v, w >$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs possède les propriétés suivantes :

- Si u et v sont liés, $u \wedge v = 0$
- $< u, u \wedge v >= 0$, $< v, u \wedge v >= 0$ et $det(u, v, u \wedge v) \geq 0$
- $v \wedge u = -(u \wedge v)$ et $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \wedge v = \lambda_1(u_1 \wedge v) + \lambda_2(u_2 \wedge v)$
- Si $\|u\| = \|v\| = 1$ et $< u, v >= 0$, alors $\|u \wedge v\| = 1$ et $det(u, v, u \wedge v) = 1$
- Si $u = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de u et v dans la base canonique,

on a : $u \wedge v = \begin{pmatrix} b_1c_2 - b_2c_1 \\ -(a_1c_2 - a_2c_1) \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

- En particulier $e_1 \wedge e_2 = e_3$, $e_2 \wedge e_3 = e_1$ et $e_3 \wedge e_1 = e_2$
- $\|u \wedge v\| = \|u\| \|v\| \sin\theta$ où θ est l'angle des vecteurs u et v.

En effectuant le produit vectoriel de $f'(t)$ et de $f''(t)$, on trouve :

$$f'(t) \wedge f''(t) = \tau(s)\frac{ds}{dt} \wedge \big(\rho(s)\nu(s)(\frac{ds}{dt})^2 + \tau(s)\frac{d^2s}{dt^2}\big) = \rho(s)(\frac{ds}{dt})^3\big(\tau(s) \wedge \nu(s)\big)$$

Comme $\tau(s)$ et $\nu(s)$ sont normalisés et orthogonaux, $\|\tau(s) \wedge \nu(s)\| = 1$ et par suite on a :

$$\rho(s) = \frac{\|f'(t) \wedge f''(t)\|}{(\frac{ds}{dt})^3} = \frac{\|f'(t) \wedge f''(t)\|}{\|f'(t)\|^3}$$

En appelant $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ les coordonnées du vecteur $f(t)$, on obtient une formule explicite de la courbure :

$\rho(s) =$

$$\frac{[\big((y'(t)z''(t) - y''(t)z'(t)\big)^2 + \big((x'(t)z''(t) - x''(t)z'(t)\big)^2 + \big((x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)\big)^2]^{1/2}}{\big((x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2\big)^{3/2}}$$

En particulier, dans le cas d'un arc plan, on obtient :

$$\rho(s) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{\big(x'(t)^2 + y'(t)^2\big)^{3/2}}$$

Exemple 3.3.9. *Soit* Γ *la parabole d'équation* $y = \dfrac{x^2}{2p}$.

La courbure au point $M(x)$ de coordonées $\begin{pmatrix} x \\ \frac{x^2}{2p} \end{pmatrix}$ est donnée par :

$$\rho = \frac{1/p}{(1+\frac{x^2}{p^2})^{3/2}} = \frac{p^2}{(x^2+p^2)^{3/2}}$$

3.4 Torsion.

Soit Γ un arc régulier orienté de classe C^2, paramétré par le paramétrage normal $s \in I \to g(s) \in E$. Soient $\tau(s)$ et $\nu(s)$ les vecteurs unitaires tangent et normal à Γ en $M(s)$ tel que $OM(s) = g(s)$. Comme ces deux vecteurs sont unitaires et orthogonaux, le vecteur $\tau(s)\wedge\nu(s)$ est un vecteur unitaire, orthogonal au plan osculateur de Γ en $M(s)$ défini par $\tau(s)$ et $\nu(s)$.

Définition 3.4.1. *Le vecteur* $\beta(s) = \tau(s) \wedge \nu(s)$ *est appelé vecteur unitaire binormal à* Γ *en* $M(s)$.

Remarque 3.4.2. *Dans le cas d'un arc plan, ce vecteur est toujours égal au troisième vecteur de la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.

Théorème 3.4.3. *Formules de Frenet.*
Soit Γ *un arc régulier orienté de classe* C^3, *paramétré par le paramétrage normal* $s \in I \to g(s) \in E$. *Soient* $\tau(s)$, $\nu(s)$ *et* $\beta(s)$ *les vecteurs unitaires tangent, normal et binormal à* Γ *en* $M(s)$ *tel que* $OM(s) = g(s)$. *Pour tout* $s \in I$, *il existe* $\theta(s)$ *tel que :*

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau(s)}{ds} = \rho(s)\nu(s) \\ \dfrac{d\nu(s)}{ds} = -\rho(s)\tau(s) + \theta(s)\beta(s) \\ \dfrac{d\beta(s)}{ds} = -\theta(s)\nu(s) \end{cases}$$

Définition 3.4.4. *Le nombre* $\theta(s)$ *défini ci-dessus s'appelle la torsion de* Γ *au point* $M(s)$.

Remarque 3.4.5. *Dans le cas d'un arc contenu dans le plan* xOy, *la torsion est identiquement nulle et les formules de Frenet se réduisent à*

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau(s)}{ds} = \rho(s)\nu(s) \\ \dfrac{d\nu(s)}{ds} = -\rho(s)\tau(s) \end{cases}$$

Démonstration : La première formule de Frenet a déja été établie (Définition 3.3.4).

Montrons la troisième :

$\beta(s)$ est un vecteur de norme 1. Donc pour tout $\forall s \in I$, $< \beta(s), \beta(s) >= 1$. En dérivant cette relation, on trouve

$$2 < \beta(s), \frac{d\beta(s)}{ds} >= 0$$

Donc le vecteur $\frac{d\beta(s)}{ds}$ est orthogonal à $\beta(s)$.

D'autre part, $\beta(s)$ est orthogonal à $\tau(s)$ pour tout s. En dérivant la relation

$$\forall s \in I \ , \ < \beta(s), \tau(s) >= 0$$

on trouve

$$< \tau(s), \frac{d\beta(s)}{ds} > + < \beta(s), \frac{d\tau(s)}{ds} >= 0$$

Or

$$< \beta(s), \frac{d\tau(s)}{ds} >= \rho(s) < \beta(s), \nu(s) >= 0$$

On obtient donc

$$< \tau(s), \frac{d\beta(s)}{ds} >= 0$$

et le vecteur $\frac{d\beta(s)}{ds}$ est orthogonal à $\tau(s)$.

De ces deux résultats, on déduit que le vecteur $\frac{d\beta(s)}{ds}$ est colinéaire à $\nu(s)$. On appelle $\theta(s)$ le nombre réel tel que

$$\frac{d\beta(s)}{ds} = -\theta(s)\nu(s)$$

Ceci établit la troisième formule de Frenet

Pour établir la deuxième formule de Frenet, on dérive la relation

$$\forall s \in I \ , \ < \beta(s), \nu(s) >= 0$$

On trouve

$$< \beta(s), \frac{d\nu(s)}{ds} > + < \frac{d\beta(s)}{ds}, \nu(s) >= 0$$

Or, le produit $< \frac{d\beta(s)}{ds}, \nu(s) >$ vaut $-\theta(s)$ d'après la troisième formule de Frenet.

Donc

$$< \beta(s), \frac{d\nu(s)}{ds} >= \theta(s)$$

D'autre part, on dérive la relation

$$\forall s \in I \ , \ < \tau(s), \nu(s) >= 0$$

On trouve

$$< \tau(s), \frac{d\nu(s)}{ds} > + < \frac{d\tau(s)}{ds}, \nu(s) >= 0$$

Or d'après la première formule de Frenet,

$$< \frac{d\tau(s)}{ds}, \nu(s) >= \rho(s)$$

Donc

$$< \tau(s), \frac{d\nu(s)}{ds} >= -\rho(s)$$

Enfin, on dérive la relation

$$\forall s \in I \ , \ < \nu(s), \nu(s) >= 1$$

On trouve

$$2 < \nu(s), \frac{d\nu(s)}{ds} >= 0$$

De ces trois calculs, on déduit que

$$\frac{d\nu(s)}{ds} = -\rho(s)\tau(s) + \theta(s)\beta(s)$$

ce qui établit bien la deuxième formule de Frenet. ■

Proposition 3.4.6. *Soit Γ un arc régulier orienté de classe C^3, paramétré par le paramétrage normal $s \in I \to g(s) \in E$. Soient $\tau(s)$, $\nu(s)$ et $\beta(s)$ les vecteurs unitaires tangent, normal et binormal à Γ en $M(s)$ tel que $OM(s) = g(s)$. Alors Γ est un arc plan si et seulement si sa torsion $\theta(s)$ est identiquement nulle sur I.*

Démonstration : Si l'arc Γ est plan, quitte à changer de repère, on peut supposer qu'il est dans le plan xOy. On a déja vu que dans ce cas, le vecteur binormal β est constant égal au troisième vecteur de base et que la torsion de Γ est identiquement nulle (Remarque $).

Réciproquement, supposons que la torsion de Γ est identiquement nulle et calculons les dérivées successives de g, en utilisant les formules de Frenet :

$$g'(s) = \tau(s) \ , \ g''(s) = \rho(s)\nu(s)$$

$$g'''(s) = \rho(s)\frac{d\nu(s)}{ds} + \rho'(s)\nu(s) = \rho(s)\big(-\rho(s)\tau(s) + \theta(s)\beta(s)\big) + \rho'(s)\nu(s) =$$

$$-\big(\rho(s)\big)^2\tau(s) + \rho'(s)\nu(s)$$

On en conclut que les vecteurs $g'(s), g''(s), g'''(s)$ sont liés dans $\mathbb{R}^3$ quel que soit $s \in I$. Précisément, ils vérifient l'équation :

$$\rho(s)g'''(s) = -\big(\rho(s)\big)^3 g'(s) + \rho'(s)g''(s)$$

Soit s_0 fixé dans I et V le plan affine passant par $M(s_0) \in \Gamma$ tel que $OM(s_0) = g(s_0)$ et de direction $\tau(s_0), \nu(s_0)$. On change le repère pour que V soit le plan xOy, défini par l'équation $z = 0$.

Si $s \to z(s)$ est la troisième coordonnée du paramétrage de Γ dans ce nouveau repère, cette fonction vérifie :

$$\rho(s)z'''(s) = -\big(\rho(s)\big)^3 z'(s) + \rho'(s)z''(s)$$

Mais cette fonction vérifie aussi

$$z''(s_0) = z'(s_0) = z(s_0) = 0$$

On montre aisément que la seule solution d'une équation différentielle de ce type est $z(s) = 0$ pour tout $s \in I$. L'arc Γ reste donc bien dans le plan V. ■

Calcul de la torsion.

On suppose que l'arc régulier orienté Γ de classe C^3 est donné par un paramétrage quelconque $t \in]a_0, b_0[\rightarrow f(t)$. Soit $t \rightarrow s(t)$ une abscisse curviligne de Γ. Alors, on peut écrire :

$$ds = \|f'(t)\|\, dt$$

et en dérivant la fonction f, on trouve les formules suivantes :

$$f'(t) = \tau(s)\frac{ds}{dt}$$

$$f''(t) = \rho(s)\nu(s)\big(\frac{ds}{dt}\big)^2 + \tau(s)\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$f'''(t) = \tau(s)[\frac{d^3s}{dt^3} - (\frac{ds}{dt})^3(\rho(s))^2] + \nu(s)[3\rho(s)\frac{d^2s}{dt^2}\frac{ds}{dt} + (\frac{ds}{dt})^3\rho'(s)] +$$

$$\beta(s)[(\frac{ds}{dt})^3\rho(s)\theta(s)]$$

D'où

$$det\big(f'(t), f''(t), f'''(t)\big) = \rho(s)^2\theta(s)\big(\frac{ds}{dt}\big)^6$$

On en déduit donc la formule :

$$\theta(s) = \frac{det\big(f'(t), f''(t), f'''(t)\big)}{\rho(s)^2\,\|f'(t)\|^6} = \frac{det\big(f'(t), f''(t), f'''(t)\big)}{\|f'(t) \wedge f''(t)\|^2}$$

Exemple 3.4.7. *(Hélice circulaire)*

On considère l'arc régulier orienté paramétré pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$$

On a :

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt = \sqrt{a^2 + b^2}dt$$

Posons $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. On a donc :

$$\tau = \begin{pmatrix} -\frac{a}{c}\sin t \\ \frac{a}{c}\cos t \\ \frac{b}{c} \end{pmatrix} \;,\; \frac{d\tau}{ds} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{c^2}\cos t \\ -\frac{a}{c^2}\sin t \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; \nu = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit : $\rho = \dfrac{a}{c^2} = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$

On a aussi :

$$\beta = \tau \wedge \nu = \begin{pmatrix} -\frac{a}{c}\sin t \\ \frac{a}{c}\cos t \\ \frac{b}{c} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{c}\sin t \\ -\frac{b}{c}\cos t \\ \frac{a}{c} \end{pmatrix} \;,\; \frac{d\beta}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{b}{c^2}\cos t \\ \frac{b}{c^2}\sin t \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{b}{c^2}\nu$$

On en déduit : $\theta = \dfrac{b}{c^2} = \dfrac{b}{a^2 + b^2}$.

Exemple 3.4.8. *Cubique gauche.*
On considère l'arc régulier orienté paramétré pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t^2}{2} \\ z = \dfrac{t^3}{6} \end{cases}$$

On a :

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt = \sqrt{1 + t^2 + \frac{t^4}{4}}dt = (1 + \frac{t^2}{2})dt$$

On a donc :

$$f'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \;,\; f''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \;,\; f'''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;,\; f'(t) \wedge f''(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit : $\rho = \dfrac{\sqrt{1 + t + \frac{t^2}{4}}}{(1 + \frac{t^2}{2})^3} = (1 + \dfrac{t^2}{2})^{-2}$
On a aussi :

$$\beta = \frac{f'(t) \wedge f''(t)}{\|f'(t) \wedge f''(t)\|} = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2}(1 + \frac{t^2}{2})^{-1} \\ -t(1 + \frac{t^2}{2})^{-1} \\ (1 + \frac{t^2}{2})^{-1} \end{pmatrix} \;,\; \nu = \beta \wedge \tau = \begin{pmatrix} -(t + \frac{t^3}{2})(1 + \frac{t^2}{2})^{-2} \\ -(\frac{t^4}{4} - 1)(1 + \frac{t^2}{2})^{-2} \\ (t + \frac{t^3}{2})(1 + \frac{t^2}{2})^{-2} \end{pmatrix}$$

D'où

$$\theta = \frac{det(f'(t), f''(t), f'''(t))}{\rho^2 \|f'(t)\|^2} = +(1 + \frac{t^2}{2})^{-2}$$

Application 3.4.9. *Developpées-Développantes dans $\mathbb{R}^2$.*
Soit Γ un arc régulier orienté de classe C^2, paramétré par le paramétrage normal $s \in I \to g(s) \in \mathbb{R}^2$. Soient $\tau(s)$ et $\nu(s)$ les vecteurs unitaires tangent et normal à Γ en $M(s)$ tel que $OM(s) = g(s)$.

On appelle développée de Γ l'arc paramétré par

$$s \in I \to d_1(s) = g(s) + R(s)\nu(s)$$

c'est à dire le lieu des points $M_1(s)$ tel que $OM_1(s) = OM(s) + R(s)\nu(s)$.
C'est donc le lieu du centre de courbure de Γ.
Le vecteur tangent à la développée est donné par

$$d_1'(s) = \tau(s) + R'(s)\nu(s) + R(s)\frac{d\nu(s)}{ds} = R'(s)\nu(s)$$

Sa tangente est donc orientée par le vecteur normal à Γ.

On appelle développante de Γ l'arc paramétré par

$$s \in I \to d_2(s) = g(s) - (s - s_0)\tau(s)$$

La dévolopante de Γ est le lieu Γ_2 des points $M_2(s)$ tels que

$$OM_2(s) = OM(s) - (s - s_0)\tau(s)$$

Le point M_2 est donc sur la tangente à Γ en $M(s)$. La tangente en $M_2(s)$ à Γ_2 est donné par le vecteur

$$d_2'(s) = g'(s) - \tau(s) - (s - s_0)\frac{d\tau(s)}{ds} = -(s - s_0)\rho(s)\nu(s)$$

Sa tangente est donc orientée par le vecteur normal à Γ.

4

PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES SURFACES PARAMÉTRÉES

4.1 Définitions.

Dans tout ce chapitre, E sera l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$. Tous les domaines ouverts de $D \subset \mathbb{R}^2$ de ce chapitre pourront être non bornés.

Rappel. *1) Soit D un domaine ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $F : D \to \mathbb{R}^3$ une application de classe C^1. Pour $(s,t) \in D$, soient $\begin{pmatrix} F_1(s,t) \\ F_2(s,t) \\ F_3(s,t) \end{pmatrix}$ les coordonnées de $F(s,t)$. On appelle application linéaire dérivée et on note $F'(s,t)$, l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ de matrice :*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial F_1}{\partial t}(s,t) \\ \frac{\partial F_2}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial F_2}{\partial t}(s,t) \\ \frac{\partial F_3}{\partial s}(s,t) & \frac{\partial F_3}{\partial t}(s,t) \end{pmatrix}$$

On notera $\dfrac{\partial F}{\partial s}(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial F_2}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial F_3}{\partial s}(s,t) \end{pmatrix}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial t}(s,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial t}(s,t) \\ \frac{\partial F_2}{\partial t}(s,t) \\ \frac{\partial F_3}{\partial s}(s,t) \end{pmatrix}$. La matrice de $F'(s,t)$ sera alors égale à

$$\left(\frac{\partial F}{\partial s}(s,t) \quad \frac{\partial F}{\partial t}(s,t) \right)$$

2) Soit D' un autre domaine ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\gamma : D' \to D$ une application bijective, de classe C^1 ainsi que son inverse. Pour $(u,v) \in D'$, soient $\begin{pmatrix} \gamma_1(u,v) \\ \gamma_2(u,v) \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\gamma(u,v)$. On appelle application linéaire dérivée et on note $\gamma'(u,v)$, l'application linéaire bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ de matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \gamma_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \gamma_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \gamma_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

Le Jacobien de γ au point $(u,v) \in D'$ est le déterminant de l'application linéaire $\gamma'(u,v)$.

Définition 4.1.1. *1) Une surface régulière orientée Σ de E est définie par un domaine ouvert D de $\mathbb{R}^2$ et une application $F : D \to E$ de classe C^1, injective et à dérivée injective en tout point $(s,t) \in D$, c'est à dire que le couple $\big(\dfrac{\partial F(s,t)}{\partial s}(s,t), \dfrac{\partial F(s,t)}{\partial t}(s,t)\big)$ est libre. La surface Σ est l'image de D par F, c'est à dire : $\Sigma = F(D)$. On dit alors que F est une paramétrisation de Σ.*

2) Σ est aussi le lieu des points $M(s,t)$ tels que $OM(s,t) = F(s,t)$, où O est l'origine du repère.

3) Pour $k \geq 2$, on dira que Σ est de classe C^k si F est de classe C^k.

On rappelle que le produit vectoriel de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ a été redéfini au chapitre 3 dans le paragraphe 3.

Remarque 4.1.2. *L'orientation d'une surface régulière orientée Σ, définie par une application $F : D \to E$ de classe C^1, est déterminée par le vecteur normal à Σ en (s,t), c'est à dire :*

$$N(s,t) = \frac{\partial F}{\partial s}(s,t) \wedge \frac{\partial F}{\partial t}(s,t)$$

Définition 4.1.3. *Un changement de paramétrisation est défini par un domaine ouvert D' de $\mathbb{R}^2$ et une application bijective $\gamma : D' \to D$, de classe C^1 ainsi que son inverse et telle que son Jacobien J soit strictement positif en tout point $(u,v) \in D'$. On dira que γ est un changement de paramétrage de classe C^k si γ est de classe C^k ainsi que son inverse.*

Proposition 4.1.4. *L'application $G = F \circ \gamma : D' \to E$ est une paramétrisation de Σ.*

Démonstration : Pour tout $u,v \in D'$, posons $\gamma(u,v) = \begin{pmatrix} \gamma_1(u,v) \\ \gamma_2(u,v) \end{pmatrix}$. Alors, la matrice de l'application linéaire dérivée au point (u,v) de l'application γ est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma_1(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \gamma_1(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial \gamma_2(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \gamma_2(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

L'application linéaire dérivée de G vérifie en tout point $(u,v) \in D'$,

$$\left(\tfrac{\partial G}{\partial u}(u,v) \quad \tfrac{\partial G}{\partial v}(u,v) \right) =$$

$$\left(\tfrac{\partial F}{\partial s}\big(\gamma_1(u,v), \gamma_2(u,v)\big) \quad \tfrac{\partial F}{\partial t}\big(\gamma_1(u,v), \gamma_2(u,v)\big) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma_1(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \gamma_1(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial \gamma_2(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \gamma_2(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Comme $\gamma'(u,v)$ est bijective, les deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $\dfrac{\partial G}{\partial u}(u,v), \dfrac{\partial G}{\partial v}(u,v)$ ont donc même rang que les deux vecteurs $\dfrac{\partial F}{\partial s}\big(\gamma_1(u,v), \gamma_2(u,v)\big), \dfrac{\partial F}{\partial t}\big(\gamma_1(u,v), \gamma_2(u,v)\big)$, ce qui prouve bien que G est une paramétrisation de Γ.

L'orientation de Σ n'est pas modifiée par ce changement de paramétrage car on vérifie que l'on a l'égalité suivante :

$$\frac{\partial G}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial G}{\partial v}(u,v) = D_\gamma(u,v) \frac{\partial F}{\partial s}\big(\gamma_1(u,v), \gamma_2(u,v)\big) \wedge \frac{\partial F}{\partial t}\big(\gamma_1(u,v), \gamma_2(u,v)\big)$$

où $D_\gamma(u,v)$ est le Jacobien de γ en (u,v), qui par hypothèse est positif. ■

Définition 4.1.5. *1) Soit Σ une surface régulière orientée. On appellera $\overline{\Sigma}$, la surface régulière orientée égale à Σ, mais orientée en sens inverse. Si F est une paramétrisation de Σ sur le domaine D, $\overline{\Sigma}$ est paramétrée par la fonction $(t,s) \to F(s,t)$ sur le domaine D.*

2) Un changement d'orientation est défini par un domaine ouvert D' et une application bijective $\gamma : D' \to D$, de classe C^1 ainsi que son inverse, telle que son Jacobien soit strictement négatif en tout point $(u,v) \in D'$.

En reprenant la démonstration de la proposition 4.1.4, on voit qu'un changement d'orientation transforme une surface orientée Σ en $\overline{\Sigma}$.

Définition 4.1.6. *Soit Σ une surface régulière orientée, paramétrée par $F : D \to E$. On appelle plan tangent à Σ au point $M(s,t)$ tel que $OM(s,t) = F(s,t)$, le plan orienté $P_{s,t}$ d'équation paramétrique*

$$(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \to L(\lambda,\mu) = F(s,t) + \lambda\frac{\partial F}{\partial s}(s,t) + \mu\frac{\partial F}{\partial t}(s,t)$$

$P_{s,t}$ est donc le lieu des points $N(\lambda,\mu)$ tels que

$$ON(\lambda,\mu) = L(\lambda,\mu) = OM(s,t) + \lambda\frac{\partial F}{\partial s}(s,t) + \mu\frac{\partial F}{\partial t}(s,t)$$

c'est à dire que c'est un plan passant par le point $M(s,t)$ et de vecteurs directeurs $\frac{\partial F}{\partial s}(s,t)$, $\frac{\partial F}{\partial t}(s,t)$.

Remarque 4.1.7. *La normale au plan tangent $P_{s,t}$ est évidemment égale à la normale $N(s,t)$ à la surface Σ au point $M(s,t)$.*

Proposition 4.1.8. *1) Le plan tangent $P_{s,t}$ en un point $M(s,t)$ à une surface paramétrée régulière orientée Σ est invariant par un changement de paramétrage.*

2) Le plan tangent $P_{s,t}$ en un point $M(s,t)$ à une surface paramétrée régulière orientée Σ est changé en $\overline{P_{s,t}}$ par un changement d'orientation.

Démonstration : *1)* Soit $D \to F(s,t)$ un paramétrage de la surface régulière orientée Σ et $\gamma : D' \to D$ un changement de paramétrage. Soit $G = F\circ\gamma$ le nouveau paramétrage de Σ. Le plan tangent correspondant au paramétrage initial $P_{s,t}$ a pour équation

$$L(\lambda,\mu) = F(s,t) + \lambda\frac{\partial F}{\partial s}(s,t) + \mu\frac{\partial F}{\partial t}(s,t)$$

En posant $s = \gamma_1(u,v)$ et $t = \gamma_2(u,v)$, l'équation du plan tangent correspondant au nouveau paramétrage est :

$$L_0(\lambda,\mu) = G(u,v) + \lambda\frac{\partial G}{\partial u}(u,v) + \mu\frac{\partial G}{\partial v}(u,v) =$$

$$F\circ\gamma(u,v) + \lambda[\frac{\partial F}{\partial s}\big(\gamma(u,v)\big)\frac{\partial \gamma_1}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial F}{\partial t}\big(\gamma(u,v)\big)\frac{\partial \gamma_2}{\partial u}(u,v)] +$$

$$\mu[\frac{\partial F}{\partial s}\big(\gamma(u,v)\big)\frac{\partial \gamma_1}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial F}{\partial t}\big(\gamma(u,v)\big)\frac{\partial \gamma_2}{\partial v}(u,v)] =$$

$$F(s,t) + [\lambda\frac{\partial \gamma_1}{\partial u}(u,v) + \mu\frac{\partial \gamma_1}{\partial v}(u,v)]\frac{\partial F}{\partial s}(s,t) + [\lambda\frac{\partial \gamma_2}{\partial u}(u,v) + \mu\frac{\partial \gamma_2}{\partial v}(u,v)]\frac{\partial F}{\partial t}(s,t)$$

Comme le Jacobien de γ est non nul, en changeant (λ, μ) en

$$([\lambda\frac{\partial\gamma_1}{\partial u}(u,v)+\mu\frac{\partial\gamma_1}{\partial v}(u,v)],[\lambda\frac{\partial\gamma_2}{\partial u}(u,v)+\mu\frac{\partial\gamma_2}{\partial v}(u,v)])$$

cette équation est bien l'équation du plan tangent à Σ avec le paramétrage initial. De plus, comme le Jacobien de γ est positif, l'orientation est conservée et le plan tangent orienté est bien invariant par changement de paramétrage.

2) Le même calcul, avec les mêmes notations montre que si γ est un changement d'orientation, le plan tangent à $\overline{\Sigma}$ est le même que celui de Σ mais orienté dans le sens inverse.

Exemple 4.1.9. *On considère une surface Σ représentée par l'équation cartésienne $z = f(x, y)$, où f est une fonction de classe C^1.*

Cette surface est paramétrée par $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$F(x,y)=\begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$

Soient $p(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $q(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Alors, on a :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p(x,y) \end{pmatrix} \;,\; \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ q(x,y) \end{pmatrix}$$

Par suite, on a :

$$N(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\wedge\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p(x,y) \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} O \\ 1 \\ q(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -p(x,y) \\ -q(x,y) \\ 1 \end{pmatrix}\neq 0$$

Le rang de ces deux vecteurs est donc 2 et par suite Σ est une surface régulière.
L'équation du plan tangent en $M(x, y)$ à Σ est

$$L(\lambda,\mu)=\begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p(x,y) \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ q(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

On en déduit que l'équation cartésienne de ce plan est

$$Z-f(x,y)=(X-x)p(x,y)+(Y-y)q(x,y)$$

Exemple 4.1.10. *On considère la sphère Σ centrée à l'origine et de rayon R représentée par l'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.*

Cette surface est une surface paramétrée par

$$(\phi,\theta)\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times[0,2\pi]\to F(\phi,\theta)=\begin{pmatrix} R\cos\phi\cos\theta \\ R\cos\phi\sin\theta \\ R\sin\phi \end{pmatrix}$$

Le plan tangent en un point a pour vecteurs directeurs :

$$\frac{\partial F}{\partial \phi}(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} -R\sin\phi\cos\theta \\ -R\sin\phi\sin\theta \\ R\cos\phi \end{pmatrix} \ , \ \frac{\partial F}{\partial \theta}(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} -R\cos\phi\sin\theta \\ R\cos\phi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$N(\phi,\theta) = \frac{\partial F}{\partial \phi}(\phi,\theta) \wedge \frac{\partial F}{\partial \theta}(\phi,\theta) =$$

$$\begin{pmatrix} -R\sin\phi\cos\theta \\ -R\sin\phi\sin\theta \\ R\cos\phi \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -R\cos\phi\sin\theta \\ R\cos\phi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = -R^2 \begin{pmatrix} (\cos\phi)^2\cos\theta \\ (\cos\phi)^2\sin\theta \\ \cos\phi\sin\phi \end{pmatrix} \neq O$$

Ces vecteurs sont linéairement indépendants et donc la surface est régulière.

Exemple 4.1.11. *On considère le cylindre Σ centré à l'origine, d'axe vertical et de rayon R, représenté par l'équation cartésienne $x^2 + y^2 = R^2$.*

Cette surface est une surface paramétrée par

$$(z,\theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \to F(z,\theta) = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

Le plan tangent en un point a pour vecteurs directeurs :

$$\frac{\partial F}{\partial z}(z,\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \frac{\partial F}{\partial \theta}(z,\theta) = \begin{pmatrix} -R\sin\theta \\ R\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$N(z,\theta) = \frac{\partial F}{\partial z}(z,\theta) \wedge \frac{\partial F}{\partial \theta}(z,\theta) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -R\sin\theta \\ R\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\cos\theta \\ -R\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

Ces vecteurs sont linéairement indépendants et donc la surface est régulière.

4.2 Longueur d'un arc régulier tracé sur une surface régulière paramétrée.

Dans la suite, on suppose de plus que $E = \mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire euclidien usuel, que l'on notera $< .,. >$. On notera aussi $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

Proposition 4.2.1. *Soit Σ une surface régulière paramétrée par $(u,v) \in D \to F(u,v)$ et soit Γ un arc orienté régulier tracé sur Σ, défini sur un intervalle $]a_0,b_0[$ par la paramétrisation $t \to f(t) = F\big(u(t),v(t)\big)$, où $(u'(t),v'(t)) \neq (0,0)$ pour tout $t \in]a_0,b_0[$. Soit $[a,b] \subset]a_0,b_0[$. La longueur de Γ sur $[a,b]$ est égale à :*

$$s_{[a,b]}(\Gamma) = \int_a^b \|f'(t)\|\, dt$$

avec

$$\|f'(t)\|^2 = \left\| \frac{\partial F}{\partial u}\big(u(t),v(t)\big) \right\|^2 u'(t)^2 +$$

$$2 < \frac{\partial F}{\partial u}\big(u(t),v(t)\big), \frac{\partial F}{\partial v}\big(u(t),v(t)\big) > u'(t)v'(t) + \left\| \frac{\partial F}{\partial v}\big(u(t),v(t)\big) \right\|^2 v'(t)^2$$

Démonstration : Il suffit de calculer $f'(t)$ et d'appliquer la définition 3.2.2 :

$$f'(t) = [F\big(u(t),v(t)\big)]' = \frac{\partial F}{\partial u}\big(u(t),v(t)\big)u'(t) + \frac{\partial F}{\partial v}\big(u(t),v(t)\big)v'(t)$$

La norme de ce vecteur est bien égale à l'expression ci-dessus. ■

Comme dans le chapitre 3, on pourra écrire symboliquement cette relation :

$$ds^2 = [\left\| \frac{\partial F}{\partial u}\big(u(t),v(t)\big) \right\|^2 u'(t)^2 +$$

$$2 < \frac{\partial F}{\partial u}\big(u(t),v(t)\big), \frac{\partial F}{\partial v}\big(u(t),v(t)\big) > u'(t)v'(t) + \left\| \frac{\partial F}{\partial v}\big(u(t),v(t)\big) \right\|^2 v'(t)^2]dt^2$$

ou de façon encore plus abrégée :

$$ds^2 = \left\| \frac{\partial F}{\partial u} \right\|^2 du^2 + 2 < \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v} > dudv + \left\| \frac{\partial F}{\partial v} \right\|^2 dv^2$$

Exemple 4.2.2. *1) Soit Γ un arc régulier paramétré par*

$$t \in]a_0,b_0[\to \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ f\big(x(t),y(t)\big) \end{pmatrix}$$

tracé sur la surface d'équation cartésienne $z = f(x,y)$. Alors, avec les notations de l'exemple 4.1.9 et en posant pour simplifier $p = p\big(x(t),y(t)\big)$ et $q = q\big(x(t),y(t)\big)$, on a :

$$ds^2 = [(1+p^2)x'(t)^2 + 2pqx'(t)y'(t) + (1+q^2)y'(t)^2]dt^2$$

ou encore en abrégé :

$$ds^2 = (1+p^2)dx^2 + 2pqdxdy + (1+q^2)dy^2$$

2) *Soit Γ un arc régulier paramétré par*

$$t \in]a_0, b_0[\to \begin{pmatrix} R\cos\phi(t)\cos\theta(t) \\ R\cos\phi(t)\sin\theta(t) \\ R\sin\phi(t) \end{pmatrix}$$

tracé sur la sphère centrée à l'origine, de rayon R. Alors, avec les notations de l'exemple 4.1.10, on a :

$$ds^2 = [R^2\phi'(t)^2 + R^2\big(\cos\phi(t)\big)^2\theta'(t)^2]dt^2$$

ou encore en abrégé :

$$ds^2 = R^2d\phi^2 + R^2\big(\cos\phi\big)^2d\theta^2$$

3) *Soit Γ un arc régulier paramétré par*

$$t \in]a_0, b_0[\to \begin{pmatrix} R\cos\theta(t) \\ R\sin\theta(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

tracé sur le cylindre centré à l'origine, d'axe vertical et de rayon R. Alors, avec les notations de l'exemple 4.1.11, on a :

$$ds^2 = [z'(t)^2 + R^2\theta'(t)^2]dt^2$$

ou encore en abrégé :

$$ds^2 = dz^2 + R^2d\theta^2$$

4.3 Aire d'une surface paramétrée.

Définition 4.3.1. *Soit Σ une surface régulière paramétrée par $(s,t) \in D \to F(s,t)$. On appelle élément d'aire et on note $d\sigma$:*

$$d\sigma = \left\| \frac{\partial F}{\partial s}(s,t) \wedge \frac{\partial F}{\partial t}(s,t) \right\| dsdt = \|N(s,t)\|\, dsdt$$

Exemple 4.3.2. *On considère une surface Σ représentée par l'équation cartésienne $z = f(x,y)$, où f est une fonction de classe C^1 (cf. exemple 4.1.9).*

Cette surface est paramétrée par $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$

En posant $p(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $q(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, on a, comme dans l'exemple 4.1.9 :

$$N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p(x,y) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} O \\ 1 \\ q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p(x,y) \\ -q(x,y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$d\sigma = \sqrt{1 + p(x,y)^2 + q(x,y)^2} dxdy$$

Exemple 4.3.3. *On considère la sphère Σ de rayon R représentée par l'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (cf. exemple 4.1.10).*

Cette surface est une surface paramétrée par

$$(\phi, \theta) \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times [0, 2\pi] \to F(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} R\cos\phi\cos\theta \\ R\cos\phi\sin\theta \\ R\sin\phi \end{pmatrix}$$

On en déduit donc, comme dans l'exemple 4.1.10 :

$$N(\phi,\theta) = \frac{\partial F}{\partial \phi}(\phi,\theta) \wedge \frac{\partial F}{\partial \theta}(\phi,\theta) =$$

$$\begin{pmatrix} -R\sin\phi\cos\theta \\ -R\sin\phi\sin\theta \\ R\cos\phi \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -R\cos\phi\sin\theta \\ R\cos\phi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = -R^2 \begin{pmatrix} (\cos\phi)^2\cos\theta \\ (\cos\phi)^2\sin\theta \\ \cos\phi\sin\phi \end{pmatrix}$$

D'où

$$d\sigma = R^2 \cos\phi d\theta d\phi$$

Exemple 4.3.4. *On considère le cylindre Σ d'axe vertical et de rayon R représentée par l'équation cartésienne $x^2 + y^2 = R^2$ (cf. exemple 4.1.11).*

Cette surface est une surface paramétrée par

$$(z, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \to F(z,\theta) = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

On a, comme dans l'exemple 4.1.11 :

$$N((z,\theta) = \frac{\partial F}{\partial z}(z,\theta) \wedge \frac{\partial F}{\partial \theta}(z,\theta) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -R\sin\theta \\ R\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\cos\theta \\ -R\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où

$$d\sigma = Rdzd\theta$$

Définition 4.3.5. *Soit Σ une surface régulière paramétrée par $(s,t) \in D \to F(s,t)$. L'aire de Σ est égale à*

$$A = \iint_D d\sigma = \iint_D \left\| \frac{\partial F}{\partial s}(s,t) \wedge \frac{\partial F}{\partial t}(s,t) \right\| dsdt = \iint_D \|N(s,t)\|\, dsdt$$

Montrons que cela correspond intuitivement à la notion physique d'aire :

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial s}(s,t) \wedge \frac{\partial F}{\partial t}(s,t) \right\| = \left\| \frac{\partial F}{\partial s}(s,t) \right\| \left\| \frac{\partial F}{\partial t}(s,t) \right\| |\sin\theta|$$

où θ est l'angle des deux vecteurs $\frac{\partial F}{\partial s}(s,t)$ et $\frac{\partial F}{\partial t}(s,t)$. Donc la quantité

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial s}(s,t) \wedge \frac{\partial F}{\partial t}(s,t) \right\| dsdt$$

est égale à la surface d'un parallélogramme contruit sur ces deux vecteurs, dont les côtés sont de longueur $\left\| \frac{\partial F}{\partial s}(s,t) \right\| ds$ et $\left\| \frac{\partial F}{\partial t}(s,t) \right\| dt$.
Ceci est donc l'aire élémentaire de la surface Σ au point (s,t).

Exemple 4.3.6. *1) L'aire de la sphère de rayon R est :*

$$4\pi R^2$$

2) L'aire du cylindre d'axe verticale et de rayon R, comprise entre $z = a$ et $z = b$ est

$$2\pi R(b-a)$$

En effet en reprenant les calculs des exemples 4.3.3 et 4.3.4, on trouve :
Pour la sphère :

$$A = \iint_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times[0,2\pi]} R^2 \cos\phi d\theta d\phi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} R^2 \cos\phi d\theta d\phi =$$

$$2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos\phi d\phi = 4\pi R^2$$

Pour le cylindre :

$$A = \iint_{[a,b]\times[0,2\pi]} R d\theta dz = \int_a^b \int_0^{2\pi} R d\theta dz = 2\pi R(b-a)$$

5

FORMES DIFFÉRENTIELLES

5.1 Quelques éléments d'algèbre extérieure

Dans ce chapitre, E désigne l'un des espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ avec $n = 1, 2$ ou 3.
On rappelle que le dual de E est l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E;\mathbb{R})$ des formes linéaires sur E ; on le note $E^\star$.
Si $\mathbb{R}^n$ est muni de sa base canonique $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, on définit la base duale $\{e_1^\star, e_2^\star, ..., e_n^\star\}$ par :

$$\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}, e_i^\star(e_j) = \delta_{ij}$$

On vérifie aisément que $\{e_1^\star, e_2^\star, ..., e_n^\star\}$ est une base de $E^\star$.

Définition 5.1.1. *1) Soit $p \in \mathbb{N}$. Une application $\phi : E^p = E \times E \times ...E \to \mathbb{R}$ est une forme p-linéaire alternée si*

(i) ϕ est p-linéaire

(ii) $\forall \{v_1, v_2, ..., v_p\} \in E^p$, $\forall j \in \{1, 2, ...p-1\}$,

$$\phi(v_1, ..., v_j, v_{j+1}, ..., v_p) = -\phi(v_1, ..., v_{j+1}, v_j, ..., v_p)$$

2) L'ensemble des formes p-linéaires alternées de E est noté $\Lambda_p(E)$.

Proposition 5.1.2. *Soit $\phi \in \Lambda_p(E)$. Alors :*

i) Si σ est une permutation de $\{1, 2, ...p\}$,

$$\phi(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, ..., v_{\sigma(p)}) = s(\sigma)\phi(v_1, v_2, ..., v_p)$$

où $s(\sigma)$ est la signature de σ

ii) Si $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ sont des vecteurs liés de E, alors $\phi(v_1, v_2, ..., v_p) = 0$. Ceci est en particulier le cas si l'un des vecteurs $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ est nul.

iii) Si $p > n = dim(E)$, alors $\Lambda_p(E) = \{0\}$

iv) $\Lambda_p(E)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION : *i)* Si σ est une permutation de $\{1, 2, ...p\}$, alors σ s'écrit comme composée de transpositions $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k$ et sa signature est égale par définition à $(-1)^k$. Il suffit donc d'appliquer la définition k fois pour obtenir le résultat.

ii) Remarquons d'abord que si deux des vecteurs $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ sont égaux,

$$\phi(v_1, v_2, ..., v_p) = 0$$

En effet, quitte à effectuer une permutation d'indices, ce qui ne change éventuellement que le signe de $\phi(v_1, v_2, ..., v_p)$, on peut supposer que $v_1 = v_2$. En permutant ces deux vecteurs et en appliquant la définition, on a alors :

$$\phi(v_1, v_1, ..., v_p) = -\phi(v_1, v_1, ..., v_p)$$

d'où

$$\phi(v_1, v_1, ..., v_p) = 0$$

Si les vecteurs $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ sont liés, l'un par exemple v_1 est combinaison linéaire de $\{v_2, ...v_p\}$ et par linéarité, $\phi(v_1, v_2, ..., v_p)$ sera une combinaison linéaire de $\phi(v_i, v_2, ..., v_p)$ où $i \in \{2, 3, ..., p\}$ qui seront tous nuls d'après la remarque précédente.
Donc $\phi(v_1, v_2, ..., v_p) = 0$

iii) Si $p > n$, tout système de p vecteurs est nécessairement lié et on applique *ii)*.

iv) est évident.

Représentation des formes p-linéaires alternées.

Soit ϕ une forme p-linéaire alternée sur E.

On note $v_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} e_i$ les coordonnées d'un vecteur v_j dans la base canonique de E. Compte tenu de la p-linéarité de ϕ, on obtient :

$$\phi(v_1, v_2, ..., v_p) = \sum_{\chi \in \oint_{pn}} x_{1,\chi(1)} x_{2,\chi(2)} ... x_{p,\chi(p)} \phi(e_{\chi(1)}, e_{\chi(2)}, ..., e_{\chi(p)})$$

où $\oint_{pn}$ est l'ensemble des applications injectives de $\{1, 2, ...p\}$ dans $\{1, 2, ...n\}$.

Proposition 5.1.3. *Si* $p = n$*, alors* $dim\big(\Lambda_n(E)\big) = 1$.

DÉMONSTRATION : Si $p = n$, l'expression de ϕ obtenue ci-dessus devient, compte tenu de la proposition 5.1.2 *i)* :

$$\phi(v_1, v_2, ..., v_p) = \sum_{\sigma \in \oint_{nn}} s(\sigma) x_{1,\sigma(1)} x_{2,\sigma(2)} ... x_{p,\sigma(p)} \phi(e_1, e_2, ..., e_n)$$

où $\oint_{nn}$ est l'ensemble des permutations de $\{1, 2, ..., n\}$.
Donc ϕ est déterminée par un seul coefficient : $\phi(e_1, e_2, ..., e_n)$ et la dimension de $\Lambda_n(E)$ est bien égale à 1. ■

Corollaire 5.1.4. *Si $p = n$, alors il existe une forme n-linéaire alternée unique, notée $e_1^\star \wedge e_2^\star \wedge ... \wedge e_n^\star$, sur E telle que*

$$e_1^\star \wedge e_2^\star \wedge ... \wedge e_n^\star(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$$

Définition 5.1.5. $e_1^\star \wedge e_2^\star \wedge ... \wedge e_n^\star$ *s'appelle le déterminant de n vecteurs relativement à la base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$.*

5.2 Formes p-linéaires alternées sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

On suppose que $E = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique que l'on notera $\{e_1\}$, $\{e_1, e_2\}$ ou $\{e_1, e_2, e_3\}$

Cas p=1

Il est immédiat que dans ce cas, quelque soit E, $\Lambda_1(E)$ est l'ensemble des formes linéaires sur E. C'est à dire que toute forme 1-linéaire alternée ϕ s'écrit :

sur $\mathbb{R}$, $\phi = ae_1^\star$,
sur $\mathbb{R}^2$, $\phi = ae_1^\star + be_2^\star$,
sur $\mathbb{R}^3$, $\phi = ae_1^\star + be_2^\star + ce_3^\star$,

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exemple 5.2.1. *Sur $\mathbb{R}^2$, la 1-forme linéaire alternée $\phi = ae_1^\star + be_2^\star$ est l'application qui à tout vecteur $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe $ax + by$.*

Cas $p = 2$

Dans ce cas, d'après la proposition 5.1.2, $\Lambda_2(\mathbb{R}) = \{0\}$.

D'après la proposition 5.1.3, $\Lambda_2(\mathbb{R}^2)$ est de dimension 1, c'est à dire que toute forme 2-linéaire alternée ϕ sur $\mathbb{R}^2$ s'écrit

$$\phi = a\ e_1^\star \wedge e_2^\star$$

où $e_1^\star \wedge e_2^\star$ est le déterminant usuel dans $\mathbb{R}^2$.

Dans le cas $n = 3$, une forme linéaire 2-alternée ϕ s'écrit, d'après la proposition 5.1.2 *i)*, pour $v_1 = x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3$ et $v_2 = x_2e_1 + y_2e_2 + z_2e_3$:

$$\phi(v_1, v_2) = (y_1z_2 - z_1y_2)\phi(e_2, e_3) + (z_1x_2 - x_1z_2)\phi(e_3, e_1) + (x_1y_2 - y_1x_2)\phi(e_1, e_2)$$

Donc ϕ est déterminé par les trois coefficients $\phi(e_2, e_3), \phi(e_3, e_1), \phi(e_1, e_2)$ et par suite, $\Lambda_2(\mathbb{R}^3)$ est de dimension 3. On note :

$e_2^\star \wedge e_3^\star$ la forme 2-linéaire alternée telle que $e_2^\star \wedge e_3^\star\ (v_1, v_2) = y_1z_2 - z_1y_2$
$e_3^\star \wedge e_1^\star$ la forme 2-linéaire alternée telle que $e_3^\star \wedge e_1^\star\ (v_1, v_2) = z_1x_2 - x_1z_2$
$e_1^\star \wedge e_2^\star$ la forme 2-linéaire alternée telle que $e_1^\star \wedge e_2^\star\ (v_1, v_2) = z_1x_2 - x_1z_2$

Alors toute forme 2-linéaire alternée ϕ sur $\mathbb{R}^2$ s'écrit :

$$\phi = a\ e_2^\star \wedge e_3^\star + b\ e_3^\star \wedge e_1^\star + c\ e_1^\star \wedge e_2^\star$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exemple 5.2.2. *Sur $\mathbb{R}^3$, la 2-forme linéaire alternée $\phi = a\ e_2^\star \wedge e_3^\star + b\ e_3^\star \wedge e_1^\star + c\ e_1^\star \wedge e_2^\star$ est l'application qui à tous vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ associe $a(y_1z_2 - z_1y_2) + b(z_1x_2 - x_1z_2) + c(x_1y_2 - y_1x_2)$.*

Cas p=3

Dans ce cas, $\Lambda_3(\mathbb{R}) = \Lambda_3(\mathbb{R}^2) = \{0\}$

Par contre, $\Lambda_3(\mathbb{R}^3)$ est de dimension 1. C'est à dire que toute forme 3-linéaire alternée sur $\mathbb{R}^3$ s'écrit :

$$\phi = a\ e_1^\star \wedge e_2^\star \wedge e_3^\star$$

où $e_1^\star \wedge e_2^\star \wedge e_3^\star$ est la forme 3-linéaire alternée égale au déterminant usuel dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 5.2.3. *Sur $\mathbb{R}^3$, la 3-forme linéaire alternée $\phi = a\ e_1^\star \wedge e_2^\star \wedge e_3^\star$ est l'application qui à tous vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ associe $a[x_3(y_1z_2 - z_1y_2) + y_3(z_1x_2 - x_1z_2) + z_3(x_1y_2 - y_1x_2)]$.*

Remarque 5.2.4. *Plus généralement, on peut définir le produit extérieur de p vecteurs dans $(\mathbb{R}^n)^\star$, noté $v_1^\star \wedge v_2^\star ... \wedge v_p^\star$, qui sera une forme p-linéaire alternée sur $\mathbb{R}^n$. Par construction, ce produit extérieur vérifie les propriétés :*

i) Chaque application $v_j^\star \to v_1^\star \wedge ... \wedge v_j^\star \wedge ... \wedge v_p^\star$ *est linéaire*

ii) $\forall j \in \{1, 2, ...p-1\}$,

$$v_1^\star \wedge ... \wedge v_j^\star \wedge v_{j+1}^\star \wedge ... \wedge v_p^\star = -v_1^\star \wedge ... \wedge v_{j+1}^\star \wedge v_j^\star \wedge ... \wedge v_p^\star$$

iii) *Si les vecteurs $v_1^\star, v_2^\star, ..., v_p^\star$ sont liés, $v_1^\star \wedge v_2^\star ... \wedge v_p^\star = O$.*

5.3 p-formes différentielles.

Définition 5.3.1. *Soit $E = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et A une partie de E. Une p-forme différentielle α sur A est une application de A dans $\Lambda_p(E)$.*

Cas $p = 1$

Si α est une 1-forme différentielle sur A, il existe des applications $a_i : A \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, telles que

$$\forall v \in A\ ,\ \alpha(v) = a_1(v)e_1^\star + a_2(v)e_2^\star + ... + a_n(v)e_n^\star$$

Notations 5.3.2. *Soit $v \in A$. On notera $v = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$ les coordonnées de v dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on identifiera les fonctions de v et les fonctions des n variables $(x_1, x_2, ..., x_n)$.*

Remarque 5.3.3. *Relation avec les différentielles de fonctions.*

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et soient $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n})$ ses dérivées partielles par rapport aux variables $(x_1, x_2, ..., x_n)$.
L'application linéaire dérivée $f'(v)$ de f au point v est la forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ de matrice

$$\left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(v) \quad \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(v) \quad . \quad . \quad \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(v) \right)$$

C'est donc une 1-forme différentielle alternée sur A.

Avec les notations du paragraphe précédent, cette dérivée s'écrit :

$$f'(v) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(v)e_1^\star + \frac{\partial f}{\partial x_2}(v)e_2^\star + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(v)e_n^\star$$

Soit $i \in \{1, 2, ..., n\}$.
Remarquons que si $f_i(v) = x_i$, alors $f_i'(v) = e_i^\star$. Notons que la dérivée de f_i est constante, c'est à dire que sa valeur en tout point v est la même.
Ceci justifie l'introduction des notations différentielles :

Notations 5.3.4. *On notera, pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $e_i^\star = dx_i$.*
Par suite, en notant aussi $df(v)$ la dérivée de la fonction f au point v, on obtient la formulation classique :

$$df(v) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(v)\, dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(v)\, dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(v)\, dx_n$$

Par analogie, on notera aussi :

Notations 5.3.5. *Soit α une 1-forme différentielle sur A, dont les coefficients sont notés $a_1, a_2, ..., a_n : A \to \mathbb{R}$. Alors,*

$$\forall v \in A \ , \ \alpha(v) = a_1(v)\, dx_1 + a_2(v)\, dx_2 + ... + a_n(v)\, dx_n$$

En particulier, dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, une 1-forme différentielle s'écrit :

dans $\mathbb{R}$, $\alpha(v) = a(v)\, dx$
dans $\mathbb{R}^2$, $\alpha(v) = a(v)\, dx + b(v)\, dy$
dans $\mathbb{R}^3$, $\alpha(v) = a(v)\, dx + b(v)\, dy + c(v)\, dz$

Cas $p = 2$

Dans $\mathbb{R}^2$:
Si α est une 2-forme différentielle sur $A \subset \mathbb{R}^2$, il existe une application $a : A \to \mathbb{R}$, telle que

$$\forall v \in A \ , \ \alpha(v) = a(v) \ e_1^\star \wedge e_2^\star$$

En accord avec les notations précédentes, on définit les notations suivantes :

Notations 5.3.6. *1)* *On pose* $e_1^\star \wedge e_2^\star = dxdy$

2) *Toute 2-forme différentielle sur* $A \subset \mathbb{R}^2$ *s'écrit*

$$\forall v \in A \ , \ \alpha(v) = a(v)\, dxdy$$

Remarque 5.3.7. *Etant données les propriétés des produits extérieurs sur* $\mathbb{R}^2$*, Remarque 5.2.4, on obtient les formules suivantes :*

$$dxdy = e_1^\star \wedge e_2^\star = -e_2^\star \wedge e_1^\star = -dydx$$
$$dxdx = e_1^\star \wedge e_1^\star = 0 \ , \ dydy = e_2^\star \wedge e_2^\star = 0$$

Dans $\mathbb{R}^3$:

Si α est une 2-forme différentielle sur $A \subset \mathbb{R}^3$, il existe des applications $a, b, c : A \to \mathbb{R}$, telles que

$$\forall v \in A \ , \ \alpha(v) = a(v) \ e_2^\star \wedge e_3^\star + b(v) \ e_3^\star \wedge e_1^\star + c(v) \ e_1^\star \wedge e_2^\star$$

En accord avec les notations précedentes, on définit les notations suivantes :

Notations 5.3.8. *1)* *On pose* $e_2^\star \wedge e_3^\star = dydz$*,* $e_3^\star \wedge e_1^\star = dzdx$*,* $e_1^\star \wedge e_2^\star = dxdy$

2) *Toute 2-forme différentielle sur* $A \subset \mathbb{R}^3$ *s'écrit*

$$\forall v \in A \ , \ \alpha(v) = a(v)\, dydz + b(v)\, dzdx + c(v)\, dxdy$$

Remarque 5.3.9. *Etant données les propriétés des produits extérieurs, sur* $\mathbb{R}^3$*, Remarque 5.2.4, on obtient les formules suivantes :*

$$dydz = e_2^\star \wedge e_3^\star = -e_3^\star \wedge e_2^\star = -dydz$$
$$dzdx = e_3^\star \wedge e_1^\star = -e_1^\star \wedge e_3^\star = -dxdz$$
$$dxdy = e_1^\star \wedge e_2^\star = -e_2^\star \wedge e_1^\star = -dydx$$
$$dxdx = e_1^\star \wedge e_1^\star = 0 \ , \ dydy = e_2^\star \wedge e_2^\star = 0 \ , \ dzdz = e_3^\star \wedge e_3^\star = 0$$

Cas $p = 3$

Si α est une 2-forme différentielle sur $A \subset \mathbb{R}^3$, il existe une application $a : A \to \mathbb{R}$, telle que

$$\forall v \in A \ , \ \alpha(v) = a(v) \ e_1^\star \wedge e_2^\star \wedge e_3^\star$$

En accord avec les notations précedentes, on définit enfin les notations suivantes :

Notations 5.3.10. *1)* *On pose* $e_1^\star \wedge e_2^\star \wedge e_3^\star = dxdydz$

2) *Toute 2-forme différentielle sur* $A \subset \mathbb{R}^3$ *s'écrit*

$$\forall v \in A \ , \ \alpha(v) = a(v)\, dxdydz$$

Remarque 5.3.11. *Etant données les propriétés des produits extérieurs sur* $\mathbb{R}^3$*, Remarque 5.2.4, on obtient les formules suivantes :*

$$dxdydz = e_1^\star \wedge e_2^\star \wedge e_3^\star = -e_2^\star \wedge e_1^\star \wedge e_3^\star = -dydxdz \ , \ ...$$
$$dxdxdy = e_1^\star \wedge e_1^\star \wedge e_2^\star = 0 \ , \ dydydz = e_2^\star \wedge e_2^\star \wedge e_3^\star = 0 \ , \ ...$$

Définition 5.3.12. *On dira qu'une p-forme différentielle sur* $A \subset E$ *est de classe* C^k *si ses coefficients le sont.*

5.4 Formes différentielles fermées, exactes ; transposition.

Dans toute la suite, on se placera sur $\mathbb{R}^3$, les mêmes résultats sont vrais sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ en convenant que $dz = 0$ si on est sur $\mathbb{R}^2$ et $dy = dz = 0$ si on est sur $\mathbb{R}$.

Définition 5.4.1. *Différentielle extérieure d'une forme différentielle.*
Soit α une p-forme différentielle de classe C^1 sur $A \subset \mathbb{R}^3$, $p = 1, 2$. La différentielle extérieure de α est la $(p+1)-$forme différentielle $d\alpha$ définie par :

$$\alpha = a\,dx + b\,dy + c\,dz \Rightarrow d\alpha = da\,dx + db\,dy + dc\,dz$$

$$\alpha = a\,dydz + b\,dzdx + c\,dxdy \Rightarrow d\alpha = da\,dydz + db\,dzdx + dc\,dxdy$$

où da, db, dc sont les différentielles des fonction a, b, c.

Cette définition généralise la notion de différentielle d'une fonction. En effet une fonction f sur $A \subset \mathbb{R}^3$ de classe C^1 peut être considérée comme une 0-forme différentielle de classe C^1 et sa différentielle est bien une 1-forme différentielle (remarque 5.3.3).

En appliquant les régles de calcul données par les remarques 5.3.7, 5.3.9et 5.3.11 et en écrivant

$$da = a'_x\,dx + a'_y\,dy + a'_z\,dz \ , \ db = b'_x\,dx + b'_y\,dy + b'_z\,dz \ , \ dc = c'_x\,dx + c'_y\,dy + c'_z\,dz$$

on trouve immédiatement :

Proposition 5.4.2. *Soit α une p-forme différentielle de classe C^1 sur $A \subset \mathbb{R}^3$, $p = 1, 2$.*

$$\alpha = a\,dx + b\,dy + c\,dz \Rightarrow d\alpha = (c'_y - b'_z)\,dydz + (a'_z - c'_x)\,dzdx + (b'_x - a'_y)\,dxdy$$

$$\alpha = a\,dydz + b\,dzdx + c\,dxdy \Rightarrow d\alpha = (a'_x + b'_y + c'_z)\,dxdydz$$

Définition 5.4.3. *Soit α une p-forme différentielle sur $A \subset \mathbb{R}^3$, $p = 1, 2, 3$. On dit que α est exacte s'il existe une $(p-1)-$forme différentielle ω de classe C^1 sur A telle que*

$$\alpha = d\omega$$

Proposition 5.4.4. *1) $p = 1$: $\alpha = a\,dx + b\,dy + c\,dz$ est exacte s'il existe une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ telle que*

$$a = f'_x \ , \ b = f'_y \ , \ c = f'_z$$

2) $p = 2$: $\alpha = a\,dydz + b\,dzdx + c\,dxdy$ est exacte s'il existe des fonctions $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ telles que

$$a = h'_y - g'_z \ , \ b = f'_z - h'_x \ , \ c = g'_x - f'_y$$

3) $p = 3$: $\alpha = a\,dxdydz$ est exacte s'il existe des fonctions $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ telles que

$$a = f'_x + g'_y + h'_z$$

Exemple 5.4.5. *Soit α la 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$ telle que :*

$$\alpha(x, y) = (2x\cos y - y^2 \sin x)\,dx + (2y\cos x - x^2 \sin y)\,dy$$

Alors α est exacte.

En effet , on cherche une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$f'_x = 2x\cos y - y^2 \sin x \ , \ f'_y = 2y\cos x - x^2 \sin y$$

Toutes les fonctions définies par $f(x, y) = x^2 \cos y + y^2 \cos x + C$, où C est une constante conviennent.

Exemple 5.4.6. *Soit α la 2-forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$ telle que :*

$$\alpha(x,y) = dxdy$$

Alors α est exacte.

En effet, on cherche une 1-forme différentielle ω sur $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\omega = a\,dx + b\,dy \ , \ 1 = b'_x - a'_y$$

Toutes les formes différentielles définies par $\omega = (-\frac{y}{2} + C)dx + (\frac{x}{2} + C')dy$ où C et C' sont des constantes conviennent.

Définition 5.4.7. *Soit α une p-forme différentielle de classe C^1 sur $A \subset \mathbb{R}^3$, $p = 1,2,3$. On dit que α est fermée si*

$$d\alpha = 0$$

Proposition 5.4.8. *Toute forme différentielle exacte de classe C^1 est fermée.*

Démonstration : Ce résultat est dû aux formules de Schwartz : si $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est deux fois continûment différentiable, alors

$$f''_{xy} = f''_{yx} \ , \ f''_{yz} = f''_{zy} \ , \ f''_{zx} = f''_{xz}$$

Soit α une $p-$forme différentielle exacte de classe C^1. Distinguons les cas $p = 1,2,3$:
Si $p = 1$, il existe une fonction f de classe C^2 telle que

$$\alpha = f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz$$

D'où :

$$d\alpha = (f''_{zy} - f''_{yz})\,dydz + (f''_{xz} - f''_{zx})\,dzdx + (f''_{yx} - f''_{xy})\,dxdy = 0$$

Si $p = 2$, il existe des fonctions f, g, h de classe C^2 telles que

$$\alpha = (h'_y - g'_z)\,dydz + (f'_z - h'_x)\,dzdx + (g'_x - f'_y)\,dxdy$$

D'où :

$$d\alpha = (h''_{yx} - g''_{zx} + f''_{zy} - h''_{xy} + g''_{xz} - f''_{yz})\,dxdydz = 0$$

Si $p = 3$, $d\alpha = 0$ car $d\alpha$ est une 4-forme différentielle sur $\mathbb{R}^3$. ■

Définition 5.4.9. *Transposition des formes différentielles.*
Soient E et F deux espaces vectoriels égaux à $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, $\alpha : A \subset F \to \Lambda_p(F)$ une p-forme différentielle sur A et $\phi : U \subset E \to F$ une application de classe C^1 telle que $\phi(U) \subset A$.
La transposée de α par ϕ est la p-forme différentielle $\phi^\star\alpha : U \subset E \to \Lambda_p(E)$ telle que

$$\forall v \in U \ , \ \phi^\star\alpha(v) = \alpha\big(\phi(v)\big)\circ\phi'(v)$$

On rappelle que quel que soit $v \in U, \phi'(v) \in \mathscr{L}(E;F)$.

Tous les exemples que nous allons traiter sont tels que $F=\mathbb{R}^3$. Les cas $F=\mathbb{R}^2$ et $F=\mathbb{R}$ s'en déduisent en prenant $dz=0$ ou $dy=dz=0$. Les applications ϕ seront donc à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Soient $\phi=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ les coordonnées de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 5.4.10. *Cas $p=1$, $\alpha=a\,dx+b\,dy+c\,dz : A\subset\mathbb{R}^3\to\Lambda_1(\mathbb{R}^3)$.*

1) *Si $\phi : U\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, on obtient, $\forall t\in U$:*

$$\phi^\star\alpha(t)=[a\big(\phi(t)\big)x'(t)+b\big(\phi(t)\big)y'(t)+c\big(\phi(t)\big)z'(t)]\,dt$$

2) *Si $\phi : U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, on obtient, $\forall (s,t)\in U$:*

$$\phi^\star\alpha(s,t)=[a\big(\phi(s,t)\big)x'_s(s,t)+b\big(\phi(s,t)\big)y'_s(s,t)+c\big(\phi(s,t)\big)z'_s(s,t)]\,ds+$$

$$[a\big(\phi(s,t)\big)x'_t(s,t)+b\big(\phi(s,t)\big)y'_t(s,t)+c\big(\phi(s,t)\big)z'_t(s,t)]\,dt$$

3) *Si $\phi : U\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, on obtient, $\forall (s,t,u)\in U$:*

$$\phi^\star\alpha(s,t,u)=$$

$$[a\big(\phi(s,t,u)\big)x'_s(s,t,u)+b\big(\phi(s,t,u)\big)y'_s(s,t,u)+c\big(\phi(s,t,u)\big)z'_s(s,t,u)]\,ds+$$
$$[a\big(\phi(s,t,u)\big)x'_t(s,t,u)+b\big(\phi(s,t,u)\big)y'_t(s,t,u)+c\big(\phi(s,t,u)\big)z'_t(s,t,u)]\,dt$$
$$[a\big(\phi(s,t,u)\big)x'_u(s,t,u)+b\big(\phi(s,t,u)\big)y'_u(s,t,u)+c\big(\phi(s,t,u)\big)z'_u(s,t,u)]\,du$$

Proposition 5.4.11. *Cas $p=2$, $\alpha=b\,dydz+c\,dzdx+a\,dxdy : A\subset\mathbb{R}^3\to\Lambda_1(\mathbb{R}^3)$.*

1) *Si $\phi : U\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, on obtient, $\phi^\star\alpha(t)=0$*

2) *Si $\phi : U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, on obtient, $\forall (s,t)\in U$:*

$$\phi^\star\alpha(s,t)=[a\big(\phi(s,t)\big)(y'_s(s,t)z'_t(s,t)-y'_t(s,t)z'_s(s,t))+$$

$$b\big(\phi(s,t)\big)(z'_s(s,t)x'_t(s,t)-z'_t(s,t)x'_s(s,t))$$
$$c\big(\phi(s,t)\big)(x'_s(s,t)y'_t(s,t)-x'_t(s,t)y'_s(s,t))]\,dsdt$$

3) *Si $\phi : U\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, on obtient (en oubliant les termes (s,t,u) pour alléger la présentation) :*

$$\phi^\star\alpha=$$

$$[a\circ\phi(y'_sz'_t-y'_tz'_s)+b\circ\phi(z'_sx'_t-z'_tx'_s)+c\circ\phi(x'_sy'_t-x'_ty'_s)]\,dsdt+$$
$$[a\circ\phi(y'_tz'_u-y'_uz'_t)+b\circ\phi(z'_tx'_u-z'_ux'_t)+c\circ\phi(x'_ty'_u-x'_uy'_t)]\,dtdu+$$
$$[a\circ\phi(y'_uz'_s-y'_sz'_u)+b\circ\phi(z'_ux'_s-z'_sx'_u)+c\circ\phi(x'_uy'_s-x'_sy'_u)+]\,duds$$

Proposition 5.4.12. *Cas $p = 3$, $\alpha = a\, dxdydz : A \subset \mathbb{R}^3 \to \Lambda_1(\mathbb{R}^3)$.*

1) *Si $\phi : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, on obtient, $\phi^\star\alpha(t) = 0$*
2) *Si $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, on obtient, $\phi^\star\alpha(s,t) = 0$*
3) *Si $\phi : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on obtient :*

$$\phi^\star\alpha = a\circ\phi(s,t,u)det\big(\phi'(s,t,u)\big)\, dsdtdu$$

Exemple 5.4.13. *Passage en coordonnées sphériques.*

L'application ϕ est définie par : $\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$

pour $(r,\theta,\varphi) \in D = \mathbb{R}^+ \text{ x}]0, 2\pi[\text{ x}]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Soit $\alpha(x,y,z) = x\,dy - y\,dx$. Alors : $\phi^\star\alpha(r,\theta,\varphi) = r^2(\cos\varphi)^2\, d\theta$

Soit $\beta(x,y,z) = z\,dxdy$. Alors : $\phi^\star\beta(r,\theta,\varphi) = r\sin\phi\big(r(\cos\varphi)^2\, drd\theta + r^2\cos\varphi\sin\varphi\, d\theta d\varphi\big)$

Soit $\gamma(x,y,z) = dxdydz$. Alors : $\phi^\star\gamma(r,\theta,\varphi) = r^2\cos\varphi\, drd\theta d\varphi$

Exemple 5.4.14. *Passage en coordonnées cylindriques.*

L'application ϕ est définie par : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \quad \textit{pour } (r,\theta,z) \in D = \mathbb{R}^+ \text{ x}]0, 2\pi[\text{ x } \mathbb{R}. \\ z \end{cases}$

Soit $\alpha(x,y,z) = x\,dy - y\,dx$. Alors : $\phi^\star\alpha(r,\theta,z) = r^2\, d\theta$

Soit $\beta(x,y,z) = z\,dxdy$. Alors : $\phi^\star\beta(r,\theta,z) = rz\, drd\theta$

Soit $\gamma(x,y,z) = dxdydz$. Alors : $\phi^\star\gamma(r,\theta,z) = r\, drd\theta dz$

Remarque 5.4.15. *Les calculs de l'exemple précédent donnent aussi les formules dans le cas du passage en coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^2$.*

Théorème 5.4.16. *Soient E et F deux espaces vectoriels égaux à $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, $\alpha : A \subset F \to \Lambda_p(F)$ une p-forme différentielle de classe C^1 sur A et $\phi : U \subset E \to F$ une application de classe C^1 telle que $\phi(U) \subset A$.*
La transposée $\phi^\star\alpha : U \subset E \to \Lambda_p(E)$ de α par ϕ

$$d(\phi^\star\alpha) = \phi^\star d\alpha$$

c'est à dire que la différentielle de la transposée de α par ϕ est égale à la transposée par ϕ de la différentielle de α.

Démonstration : On va se placer dans un cas particulier, le cas général se traite de la même façon mais avec d'autres calculs.
Supposons que α est une 2-forme différentielle sur $A \subset \mathbb{R}^3$ et que ϕ est une application de $U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. On pose, comme ci-dessus : $\alpha = a\,dydz + b\,dzdx + c\,dxdy$ et $\phi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Alors

$$\phi^\star\alpha =$$

$$[a\circ\phi(y'_s z'_t - y'_t z'_s) + b\circ\phi(z'_s x'_t - z'_t x'_s) + c\circ\phi(x'_s y'_t - x'_t y'_s)]\, dsdt +$$

$$[a\circ\phi(y'_t z'_u - y'_u z'_t) + b\circ\phi(z'_t x'_u - z'_u x'_t) + c\circ\phi(x'_t y'_u - x'_u y'_t)]\, dtdu +$$

$$[a\circ\phi(y'_u z'_s - y'_s z'_u) + b\circ\phi(z'_u x'_s - z'_s x'_u) + c\circ\phi(x'_u y'_s - x'_s y'_u) +]\, duds$$

et par suite, après un calcul un peu long :

$$d(\phi^\star\alpha) = (a'_s\circ\phi + b'_t\circ\phi + c'_u\circ\phi) det\phi'\, dsdtdu = \phi^\star d\alpha$$

Exemples 5.4.17. *En reprenant les formes différentielles des exemples 5.4.13 et 5.4.14, on constate que $\gamma = d\beta$ et que dans le cas des coordonnées sphériques comme dans le cas des coordonnées cylindriques,*

$$\phi^\star\gamma = \phi^\star d\beta = d(\phi^\star\beta)$$

6

FORMULES DE STOKES

Dans ce chapitre, sauf mention explicite du contraire, les courbes seront orientées dans le sens trigonométrique et les surfaces seront orientées dans le sens des normales dirigées vers l'extérieur.

6.1 Intégrale d'une p-forme différentielle sur une p-surface.

Dans cette partie, on se place sur $E = \mathbb{R}^3$, le cas de $\mathbb{R}^2$ s'en déduit en faisant $z = 0$.

Cas $p = 1$:

Soit Γ un arc régulier, de classe C^1 par morceaux, orienté paramétré par une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de coordonnées $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

Soit $\alpha = a\,dx + b\,dy + c\,dz$ une 1-forme différentielle définie sur A tel que $\Gamma = f(I) \subset A$.

Définition 6.1.1. *L'intégrale de α sur Γ est définie par :*

$$\int_\Gamma \alpha = \int_I [a\big(f(t)\big)x'(t) + b\big(f(t)\big)y'(t) + c\big(f(t)\big)z'(t)]\,dt = \int_I f^\star\alpha(t)$$

Exemple 6.1.2. *On se place sur $\mathbb{R}^2$. Soient pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, la 1-forme différentielle α définie par :*

$$\alpha(x, y) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

et Γ le cercle de centre $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et de rayon R, ne passant pas par O, parcouru dans le sens trigonométrique.

Γ est paramétré par $\begin{cases} a + R\cos t \\ b + R\sin t \end{cases}$. Alors :

$$\int_\Gamma \alpha = \int_0^{2\pi} \frac{R^2 + R(a\cos t + b\sin t)}{a^2 + b^2 + R^2 + 2R(a\cos t + b\sin t)}\, dt$$

On pose $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ et il existe t_0 tel que $(a\cos t + b\sin t) = c\cos(t - t_0)$. On effectue le changement de variable $u = t - t_0$ dans l'intégrale :

$$\int_\Gamma \alpha = \int_{-t_0}^{2\pi - t_0} \frac{R^2 + R^2 c\cos u}{c^2 + R^2 + 2R\cos u}\, du$$

En passant à $\tan \dfrac{u}{2}$, on trouve :

$$\int_\Gamma \alpha = \pi[1 + \frac{R^2 - c^2}{|R^2 - c^2|}]$$

c'est à dire à $\displaystyle\int_\Gamma \alpha = 0$ si $a^2 + b^2 > R^2$ et $\displaystyle\int_\Gamma \alpha = 2\pi$ si $a^2 + b^2 < R^2$

Proposition 6.1.3. *L'intégrale de α sur Γ est indépendante du paramétrage de Γ et est changée en son opposée par un changement d'orientation.*

Démonstration : Soit $\gamma : J \to I$ un changement de paramétrage ou d'orientation de Γ, de classe C^1 et posons $g = f\circ\gamma$.

Lemme 6.1.4. *On a : $g^\star\alpha(s) = \gamma'(s) f^\star\alpha(\gamma(s))$.*

Démonstration du lemme 6.1.4 : Si $\alpha = a\,dx + b\,dy + c\,dz$, $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ et $t = \gamma(s)$, on peut écrire :

$$g^\star\alpha(s) = [a\circ g(s) g_1'(s) + b\circ g(s) g_2'(s) + c\circ g(s) g_3'(s)]\, ds =$$

$$\gamma'(s)[a\circ f\circ\gamma(s) f_1'(\gamma(s)) + b\circ f\circ\gamma(s) f_2'(\gamma(s)) + c\circ f\circ\gamma(s) f_3'(\gamma(s))]\, ds = \gamma'(s) f^\star\alpha(\gamma(s))$$

Alors, en reprenant la démonstration de la proposition 6.1.3, on peut écrire :

$$\int_J g^\star\alpha(s) = \int_J \gamma'(s) f^\star\alpha(\gamma(s)) = \pm \int_I f^\star\alpha(t)$$

la dernière égalité étant due à la formule de changement de variable dans les intégrales, le signe $+$ correspondant à un changement de paramétrage $(\gamma'(s) > 0)$ et le signe $-$ correspondant à un changement d'orientation $(\gamma'(s) < 0)$.

Définition 6.1.5. *Circulation d'un champs de vecteurs le long d'un arc Γ.*

1) On dira que V est un champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$ si V est une application de $\mathbb{R}^3$ dans lui même. On notera :

$$V(x,y,z) = \begin{pmatrix} a(x,y,z) \\ b(x,y,z) \\ c(x,y,z) \end{pmatrix}$$

2) Soit Γ un arc régulier, de classe C^1 par morceaux, orienté paramétré. La circulation de V le long de Γ est définie par

$$\int_\Gamma \alpha$$

où α est la forme différentielle $\alpha = a\,dx + b\,dy + c\,dz$.

Cas $p = 2$:

Soit Σ une surface régulière, de classe C^1 par morceaux, orientée paramétrée par une fonction $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de coordonnées $F(s,t) = \begin{pmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \\ z(s,t) \end{pmatrix}$.

Soit $\alpha = a\,dydz + b\,dzdx + c\,dxdy$ une 2-forme différentielle définie sur A telle que $\Sigma = F(D) \subset A$.

Définition 6.1.6. *L'intégrale de α sur Σ est définie par :*

$$\iint_\Sigma \alpha = \iint_D [a\big(F(s,t)\big)(y'_s(s,t)z'_t(s,t) - y'_t(s,t)z'_s(s,t)) +$$
$$b\big(F(s,t)\big)(z'_s(s,t)x'_t(s,t) - z'_t(s,t)x'_s(s,t)) + c\big(F(s,t)\big)(x'_s(s,t)y'_t(s,t) - x'_t(s,t)y'_s(s,t))]\,dsdt =$$
$$\iint_D F^\star\alpha(s,t)$$

Exemple 6.1.7. *Soient*

$$\alpha(x,y) = x\,dydz$$

et Σ le cylindre de révolution défini par $x^2 + y^2 = R^2$, $0 \le z \le h$.

Σ est paramétrée par $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z \end{cases}$, pour $(t,z) \in]0,2\pi[\times]0,h[$.

Alors :

$$\iint_\Sigma \alpha = R^2 \int_0^{2\pi}\int_0^h (\cos t)^2\,dtdz = \pi R^2 h$$

Proposition 6.1.8. *L'intégrale de α sur Σ est indépendante du paramétrage de Σ et est changée en son opposée par un changement d'orientation.*

Démonstration : Soit $\gamma : D' \to D$ un changement de paramétrage ou d'orientation de Σ, de classe C^1 et posons $G = F \circ \gamma$.

Lemme 6.1.9. *On a : $G^\star\alpha(u,v) = det\big(\gamma'(u,v)\big)F^\star\alpha(\gamma(u,v))$.*

Démonstration de lemme 6.1.9 : Si $\alpha = a\,dydz + b\,dzdx + c\,dxdy$, $G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$ et $(s,t) = \gamma(u,v)$, on peut écrire :

$$G^\star\alpha(u,v) = [a\circ G(u,v)\big(\frac{\partial G_2}{\partial u}(u,v)\frac{\partial G_3}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial G_2}{\partial v}(u,v)\frac{\partial G_3}{\partial u}(u,v)\big) +$$

$$b\circ G(u,v)\big(\frac{\partial G_3}{\partial u}(u,v)\frac{\partial G_1}{\partial v}(u,v)-\frac{\partial G_3}{\partial v}(u,v)\frac{\partial G_1}{\partial u}(u,v)\big)+$$
$$c\circ G(u,v)\big(\frac{\partial G_1}{\partial u}(u,v)\frac{\partial G_2}{\partial v}(u,v)-\frac{\partial G_1}{\partial v}(u,v)\frac{\partial G_2}{\partial u}(u,v)\big)]\,dudv$$

Or, par un calcul rapide, pour tout i et j égaux à 1,2, ou 3

$$\frac{\partial G_i}{\partial u}(u,v)\frac{\partial G_j}{\partial v}(u,v)-\frac{\partial G_i}{\partial v}(u,v)\frac{\partial G_j}{\partial u}(u,v)=$$
$$det\big(\gamma'(u,v)\big)[\frac{\partial F_i}{\partial s}\circ\gamma(u,v)\frac{\partial F_j}{\partial t}\circ\gamma(u,v)-\frac{\partial F_i}{\partial s}\circ\gamma(u,v)\frac{\partial F_j}{\partial t}\circ\gamma(u,v)]$$

Donc en reportant ci-dessus, on trouve bien

$$G^\star\alpha(u,v)=det\big(\gamma'(u,v)\big)F^\star\alpha(\gamma(u,v)$$

Alors, en reprenant la démonstration de la proposition 6.1.8, on peut écrire :

$$\iint_{D'}G^\star\alpha(u,v)\,dudv=\iint_{D'}\det\big(\gamma'(u,v)\big)F^\star\alpha(\gamma(u,v))=\pm\int_D F^\star\alpha(s,t)$$

la dernière égalité étant due à la formule de changement de variable dans les intégrales doubles, le signe $+$ correspondant à un changement de paramétrage ($\det\big(\gamma'(u,v)\big)>0$) et le signe $-$ correspondant à un changement d'orientation ($\det\big(\gamma'(u,v)\big)<0$).

Définition 6.1.10. *Flux d'un champs de vecteurs à travers la surface* Σ.
Soit

$$V(x,y,z)=\begin{pmatrix}a(x,y,z)\\b(x,y,z)\\c(x,y,z)\end{pmatrix}$$

un champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$
Soit Σ *une surface régulière, de classe* C^1 *par morceaux, orientée paramétrée. Le flux de* V *à travers* Σ *est défini par*

$$\iint_\Sigma\alpha$$

où α *est la forme différentielle* $\alpha=a\,dydz+b\,dzdx+c\,dxdy$.

On peut interpréter cette formule en remarquant que si Σ est paramétrée par la fonction $F(s,t)=\begin{pmatrix}x(s,t)\\y(s,t)\\z(s,t)\end{pmatrix}$, le vecteur normal $N(s,t)$ à Σ en (s,t) a pour coordonnées :

$$N(s,t)=\frac{\partial F}{\partial s}(s,t)\wedge\frac{\partial F}{\partial t}(s,t)=\begin{pmatrix}y'_s(s,t)z'_t(s,t)-y'_s(s,t)z'_t(s,t)\\z'_s(s,t)x'_t(s,t)-z'_s(s,t)x'_t(s,t)\\x'_s(s,t)y'_t(s,t)-x'_s(s,t)y'_t(s,t)\end{pmatrix}$$

Donc l'expression à intégrer est égale, d'après la définition 6.1.6, au produit scalaire de $V(F(s,t))$ par $N(s,t)$. On peut donc écrire le flux de V à travers Σ comme :

$$\iint_\Sigma a\,dydz+b\,dzdx+c\,dxdy=\iint_D<V\big((F(s,t)\big),N(s,t)>\,dsdt$$

Cas $p=3$:

Soit K un domaine de $\mathbb{R}^3$ et $\alpha=a\,dxdydz$ une 3-forme différentielle définie sur K.

Définition 6.1.11. *L'intégrale de α sur K est définie par :*

$$\iiint_K \alpha = \iiint_K a(x,y,z)\,dxdydz$$

6.2 Formule de Green-Riemann.

Dans cette partie, on se place sur $\mathbb{R}^2$:

Théorème 6.2.1. *Soit Γ un arc régulier, fermé, de classe C^1 par morceaux, orienté paramétré par une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de coordonnées $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Soit K le domaine limité par Γ.*
Soit $\alpha = a\,dx + b\,dy$ une 1-forme différentielle de classe C^1 sur un voisinage de K. Alors :

$$\int_\Gamma \alpha = \iint_K d\alpha$$

ou encore,

$$\int_\Gamma (a\,dx + b\,dy) = \int_I [a\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + b\big(x(t),y(t)\big)]\,dt = \iint_K (b'_x(x,y) - a'_y(x,y))\,dxdy$$

La démonstration de ce théorème se fait par approximation à partir de sa démonstration dans le cas où Γ est un rectangle.

Nous nous contenterons de le démontrer dans le cas particulier où Γ est un rectangle parcouru dans le sens trigonométrique.
On représente Γ par la réunion de 4 segments de droite orientés, soit $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \overline{\Gamma_3} \cup \overline{\Gamma_4}$, chaque Γ_i étant défini par les équations :

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x_1 \le x \le x_2 \\ y = y_1 \end{cases} , \quad \Gamma_2 : \begin{cases} x = x_2 \\ y_1 \le y \le y_2 \end{cases} , \quad \Gamma_3 : \begin{cases} x_1 \le x \le x_2 \\ y = y_2 \end{cases} , \quad \Gamma_4 : \begin{cases} x = x_1 \\ y_1 \le y \le y_2 \end{cases}$$

On trouve :

$$\int_\Gamma a\,dx + b\,dy = \int_{x_1}^{x_2} a(x,y_1)\,dx + \int_{y_1}^{y_2} b(x_2,y)\,dy + \int_{x_2}^{x_1} a(x,y_2)\,dx + \int_{y_2}^{y_1} b(x_1,y)\,dy =$$

$$\int_{x_1}^{x_2} a(x,y_1)\,dx + \int_{y_1}^{y_2} b(x_2,y)\,dy - \int_{x_1}^{x_2} a(x,y_2)\,dx - \int_{y_1}^{y_2} b(x_1,y)\,dy$$

D'autre part, on peut écrire :

$$\iint_K b'_x(x,y)\,dxdy = \int_{y_1}^{y_2} \Big(\int_{x_1}^{x_2} b'_x(x,y)\,dx\Big)\,dy = \int_{y_1}^{y_2} \big(b(x_2,y) - b(x_1,y)\big)\,dy =$$

$$\int_{y_1}^{y_2} b(x_2, y)\, dy - \int_{y_1}^{y_2} b(x_1, y)\, dy$$

$$\iint_K a'_y(x, y)\, dxdy = \int_{x_1}^{x_2} \big(\int_{y_1}^{y_2} a'_y(x, y)\, dy\big)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \big(a(x, y_2) - a(x, y_1)\big)\, dx =$$

$$\int_{x_1}^{x_2} a(x, y_2)\, dx - \int_{x_1}^{x_2} a(x, y_1)\, dx$$

En soustrayant les deux dernières expressions, on trouve bien :

$$\iint_K (b'_x(x, y) - a'_y(x, y))\, dxdy = \int_\Gamma a\, dx + b\, dy$$

Exemple 6.2.2. *Si α est une forme différentielle fermée, de classe C^1 sur un voisinage de K, alors :*

$$\int_\Gamma \alpha = \iint_K d\alpha = 0$$

C'est le cas de :

$$\alpha(x, y) = \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2}$$

et K un compact de $\mathbb{R}^2$ ne contenant pas O, limité par un arc régulier Γ, de classe C^1 par morceaux.
En effet, calculons $d\alpha$:

$$d\alpha = [\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{x^2 + y^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{x^2 + y^2})]dxdy = [\frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}]\, dxdy = 0$$

Alors, si K ne contient pas 0, on applique la formule de Green-Riemann :

$$\int_\Gamma \alpha = \iint_K d\alpha = 0$$

Si par contre, K contient 0, alpha n'est pas de classe C^1 sur K et on ne peut pas appliquer la formule de Green-Riemann.
Soit Γ_r un cercle de centre 0 et de rayon r, inclus dans K. On appelle Λ le chemin formé de Γ parcouru dans le sens trigonométrique et $\overline{\Gamma_r}$ le cercle précédent parcouru dans l'autre sens. L'intérieur de Λ est $A = K \setminus D(0, r)$, qui ne contient pas 0. Donc :

$$\int_\Lambda \alpha = \int_\Gamma \alpha - \int_{\gamma_r} \alpha = \iint_A d\alpha = 0$$

Mais on a déja calculé, dans l'exemple 6.1.2, l'intégrale de α sur Γ_r :

$$\int_{\Gamma_r} \alpha = 2\pi$$

On en déduit que :

$$\int_\Gamma \alpha = 2\pi$$

6.3 Formule d'Ostrogradski.

Dans cette partie, on se place sur $\mathbb{R}^3$:

Théorème 6.3.1. *Soit Σ une surface régulière, fermée, de classe C^1 par morceaux, orientée paramétrée par une fonction $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de coordonnées $F(s,t) = \begin{pmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \\ z(s,t) \end{pmatrix}$. Soit K le domaine limité par Σ.*
Soit $\alpha = a\,dydz + b\,dzdx + c\,dxdy$ une 2-forme différentielle de classe C^1 sur un voisinage de K. Alors :

$$\iint_\Sigma \alpha = \iiint_K d\alpha$$

ou encore,

$$\iint_\Sigma (a\,dydz + b\,dzdx + c\,dxdy) = \iiint_K (a'_x + b'_y + c'_z)(x,y,z)\,dxdydz$$

Nous admettrons ce théorème dont la démonstration est du même genre que celle de la formule de Green-Riemann : on le démontre facilement sur des cubes et on utilise un argument d'approximation pour les ensembles quelconques.

Exemple 6.3.2. *Si α est une forme différentielle fermée, de classe C^1 sur un voisinage de K, alors*

$$\iint_\Sigma \alpha = \iiint_K d\alpha = 0$$

C'est le cas de

$$\alpha = \frac{x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

dont l'intégrale est nulle sur toute surface Σ telle que le domaine K limité par Σ ne contienne pas l'origine.

Interprétation vectorielle.

Soit $V(x,y,z) = \begin{pmatrix} a(x,y,z) \\ b(x,y,z) \\ c(x,y,z) \end{pmatrix}$ un champs de vecteurs défini et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$.

Définition 6.3.3. *La divergence de V est une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, égale à*

$$div(V) = a'_x + b'_y + c'_z$$

Grâce à la définition 6.1.10 , la formule d'Ostrogradski s'exprime vectoriellement par :
Le flux d'un champs de vecteurs à travers une surface Σ est égal à l'intégrale de la divergence de ce champs de vecteurs sur le domaine K limité par Σ.
soit encore :

$$\iint_\Sigma < V\big((F(s,t)\big), N(s,t) > \,dsdt = \iiint_K div(V)$$

6.4 Formule de Stokes.

Dans cette partie, on se place sur $\mathbb{R}^3$:

Théorème 6.4.1. *Soit Γ un arc régulier, fermé, de classe C^1 par morceaux, orienté paramétré par une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de coordonnées $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Soit Σ la surface limitée par Γ.*
Soit $\alpha = a\,dx + b\,dy + c\,dz$ une 1-forme différentielle de classe C^1 sur un voisinage de Σ. Alors :

$$\int_\Gamma \alpha = \iint_\Sigma d\alpha$$

ou encore,

$$\int_\Gamma (a\,dx + b\,dy + c\,dz) = \iint_\Sigma (c'_y - b'_z)\,dydz + (a'_z - c'_x)\,dzdx + (b'_x - a'_y)\,dxdy$$

Exemple 6.4.2. *Soit Σ la surface latérale comprise entre les plans $z = 0$ et $z = h$ du cylindre d'axe Oz et de rayon R, dont les normales sont orientées vers l'extérieur et soit*

$$\alpha = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2 + z^2}$$

On appelle γ_1 le cercle d'équation $x^2 + y^2 = R^2, z = 0$ parcouru dans le sens trigonométrique et $\overline{\gamma_2}$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 = R^2, z = h$ parcouru dans le sens inverse. Le bord de Σ est $\gamma_1 \cup \overline{\gamma_2}$ Alors :

$$\int_\Gamma \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha - \int_{\gamma_2} \alpha = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{R^2}\,d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{R^2 + h^2}\,d\theta = \frac{2\pi h^2}{R^2 + h^2}$$

et :

$$\iint_\Sigma d\alpha = \iint_\Sigma \frac{2z(x\,dydz + y\,dxdz + z\,dxdy)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

La surface Σ est paramétrée par

$$(t, z) \in]0, 2\pi[\times]0, h[\ ,\ F(t, z) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ z \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\iint_\Sigma d\alpha = \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{2zR^2}{(R^2 + z^2)^2}\,dtdz = \frac{2\pi h^2}{R^2 + h^2}$$

Interprétation vectorielle.

Soit $V(x, y, z) = \begin{pmatrix} a(x, y, z) \\ b(x, y, z) \\ c(x, y, z) \end{pmatrix}$ un champs de vecteurs défini et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$.

Définition 6.4.3. *Le rotationel de V est une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, égale à*

$$rot(V) = \begin{pmatrix} c'_y - b'_z \\ a'_z - c'_x \\ b'_x - a'_y \end{pmatrix}$$

Grâce à la définition 6.1.5 , la formule de Stokes s'exprime vectoriellement par :

La circulation d'un champs de vecteurs le long d'un arc Γ est égale au flux du rotationnel de ce champs de vecteurs à travers la surface Σ limitée par Γ.

soit encore :

$$\iint_\Sigma < rot(V)\big((F(s,t)\big), N(s,t) > \; dsdt = \int_\Gamma a\,dx + b\,dy + c\,dz$$

Table des Matières

Index des définitions